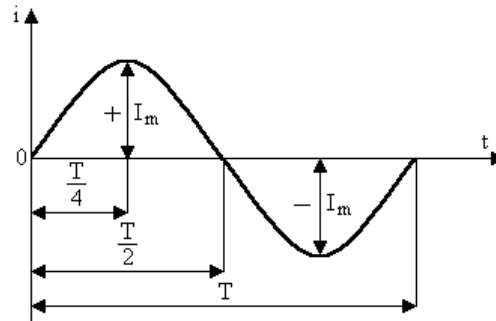


## 1. NAIZMJENIČNA STRUJA

*Naizmjenična struja je svaka struja koja u toku vremena mijenja svoj intenzitet ( jačinu ) i smjer . Naizmjenične struje se dijele na periodične i neperiodične struje. Nas posebno interesuju periodične struje koje se dijele na proste ( sinusne ) i složene ( nesinusne ) struje.*

*Prostom naizmjeničnom ili sinusnom strujom se naziva ona struja čije se promjene, po intenzitetu i smjeru, periodično ponavljaju u jednakim vremenskim intervalima. Njen vremenski dijagram dat je na slici 1.*



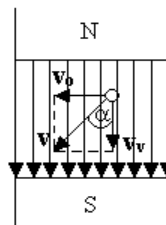
Slika 1: Vremenski dijagram naizmjenične sinusne struje

**Naizmjenična struja nastaje kao posljedica oscilatornog kretanja električnih naboja duž provodnika.** Pri tome se količina elektriciteta koja protiče kroz poprečni presjek provodnika mijenja u toku vremena. Zbog toga se mora uzeti u obzir veličina struje u svakom trenutku. *Trenutna vrijednost struje* se označava malim slovom " i " .

Dakle, *kod naizmjenične sinusoidalne struje nema "strujanja "elektrona, jer oni ne struje od jednog pola izvora do drugog ( kao kod istosmjerne struje ), nego oni osciluju oko svog središnjeg položaja.*

Naizmjenična struja se, u elektroenergetici, dobija pomoću obrtnih mašina koje se nazivaju **generatori** . *U svim obrtnim generatorima električna energija se proizvodi na principu pojave inducirana napona u navoju koji se okreće* . U njima se mehanička energija pretvara u električnu.

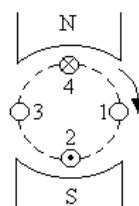
U opštem slučaju provodnik se u magnetnom polju kreće pod nekim uglom u odnosu na njegove silnice. Pri tome se brzina kretanja provodnika rastavlja na vodoravnu i okomitu komponentu ( slika 2 ) .



Slika 2: Brzina kretanja provodnika u magnetnom polju

Pod djelovanjem vodoravne komponente  $v_v$  , provodnik klizi duž magnetnih silnica i ne presijeca ih. Zato se u provodniku inducira napon uzrokovan okomitom komponentom brzine kretanja, koja uzrokuje da provodnik presijeca magnetni fluks.

Posmatrajmo sada provodnik koji se okreće u homogenom magnetnom polju dat na slici 3.



Slika 3: Okretanje provodnika u homogenom magnetnom polju

Inducirani napon je, u opštem slučaju, određen formulom:

$$u_i = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha$$

**Inducirani napon u provodniku, koji se obrće konstantnom brzinom u homogenom magnetnom polju, mijenja se po veličini i smjeru proporcionalno sinus u gla zakretanja, pa se može grafički predstaviti u obliku sinusoide .**

Za vrijeme jednog punog obrtaja, ugao  $\alpha$  se ravnomjerno mijenja od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Pri tome nastaju i promjene inducirano napona u provodniku.

U položaju 1 imamo:  $\alpha = 0^\circ$       odnosno       $\sin \alpha = 0$

U položaju 2 imamo:  $\alpha = 90^\circ$       odnosno       $\sin \alpha = 1$

U položaju 3 imamo:  $\alpha = 180^\circ$       odnosno       $\sin \alpha = 0$

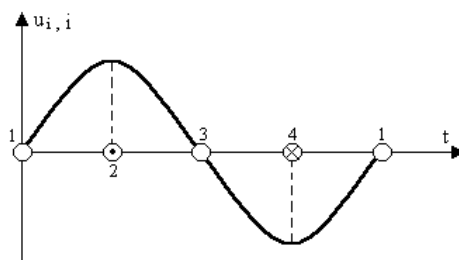
U položaju 4 imamo:  $\alpha = 270^\circ$       odnosno       $\sin \alpha = -1$

Dakle, u položajima 2 i 4 imamo maksimalnu vrijednost inducirano napona  $U_m$  s tim što je:

$$\text{Položaj 2: } u_i = B \cdot l \cdot v = U_m$$

$$\text{Položaj 4: } u_i = B \cdot l \cdot v = -U_m$$

U svim drugim tačkama, između ovih karakterističnih, inducirani napon se mijenja po sinusnom zakonu ( slika 4 ).



Slika 4: Induciranje napona i struje u provodniku koji se okreće u homogenom magnetnom polju

**U provodniku koji se okreće stalnom brzinom u homogenom magnetnom polju, inducira se napon čija se promjena veličine i smjera ponavlja istim redom poslije svakog punog okreta. Tako dobiveni napon naziva se naizmjenični napon .Ako zatvorimo krajeve provodnika u kolu će poteći struja čija se veličina i smjer periodično mijenjaju. Takva struja se naziva naizmjenična struja.**

## 2. KARAKTERISTIKE NAIZMJENIČNIH VELIČINA

### 2.1 PERIOD

**Period je dio vremena koje je potrebno da se izvrši jedna potpuna promjena naizmjenične veličine po jačini i smjeru .Period se označava sa " T ", a mjeri se u sekundama ( s ) .**

Naizmjenična veličina za vrijeme jednog perioda dva puta promijeni svoj smjer. Dakle, promjena naizmjenične veličine u jednom smjeru traje polovinu perioda, a za vrijeme druge polovine perioda smjer je suprotan ( slika 1 ) .

Promjena inducirano napona zavisi od brzine kojom se navojak obrće u magnetnom polju. Uzmimo, na primjer, da je brzina obrtanja navojka 50 puta u jednoj sekundi. To znači da se u toku jedne sekunde desi 50 promjena intenziteta i smjera naizmjenične veličine, odnosno, u jednoj sekundi se pojavi 50 perioda. S obzirom na to da 50 perioda traje jednu sekundu, vrijeme trajanja jednog perioda dobijemo kao:

$$T = \frac{1}{50} = 0,02s$$

**Vremena trajanja svakog perioda su međusobno jednaka ukoliko je brzina obrtanja navojka konstantna ( nepromjenjiva ) .**

### 2.2 MAKSIMALNA VRIJEDNOST ( AMPLITUDA )

**To je najveća vrijednost koju postiže naizmjenična veličina .U toku jednog perioda, naizmjenična veličina dva puta postiže maksimalnu vrijednost: jedanput u pozitivnom, a jedanput u negativnom smjeru. Maksimalne vrijednosti se označavaju velikim slovom i indeksom "m"(maksimum) .**

**Maksimalna vrijednost struje se označava sa  $I_m$  , a maksimalna vrijednost napona sa  $U_m$  .**

Maksimalna vrijednost induciranog napona se računa po formuli:

$$U_m = B \cdot l \cdot v$$

## 2.3 FREKVENCIJA ( UČESTANOST )

**Frekvencija je broj perioda u jednoj sekundi .Frekvencija se označava sa " f ".Jedinica za mjerenje frekvencije je " Herc " ( oznaka Hz ) .**

Između frekvencije i perioda vlada slijedeći odnos:

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{ili} \quad f = \frac{1}{T}$$

Iz ovoga možemo izvesti jedinicu za frekvenciju kao:

$$\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$$

Veće jedinice od Herca su: kiloherc ( kHz ), megaherc ( MHz ), gigaherc ( GHz ).

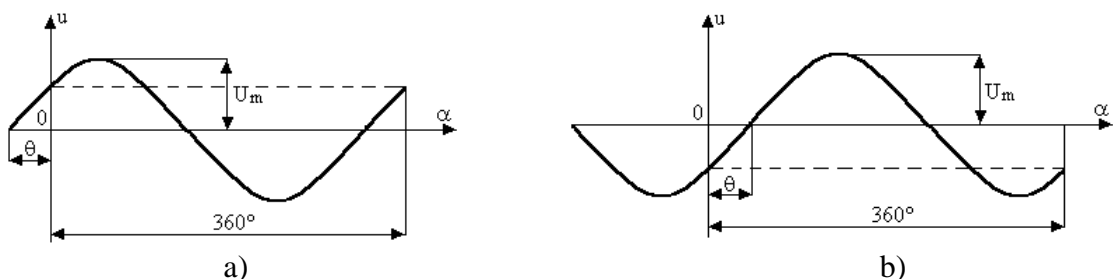
Frekvencija napona u elektrotehnici jake struje je standardna u cijeloj Evropi i iznosi 50 Hz, a u Americi iznosi 60 Hz.U radio – vezi se primjenjuju naizmjenične struje više frekvencije – reda megaherca i više, dok je frekvencija struja u radarskim uređajima reda gigaherca.

## 2.4 POČETNA FAZA

**Početna faza je fazni ugao koji odgovara početnom trenutku vremena .**

Do sada smo kao početak mjerenja vremena ( t = 0 ) uzimali trenutak kada je trenutna vrijednost induciranog napona u navojku jednaka nuli ( položaj 1, slika 4 ).To, međutim, nije pravilo, već predstavlja poseban slučaj.

Pretpostavimo da je početak promatranja naizmjenične veličine negdje između položaja 1 i položaja 2, na slici 4.Za takav položaj provodnika početna faza je pomjerena za ugao  $\theta$  u odnosu na koordinatni početak, a inducirani napon " u " ima određenu pozitivnu vrijednost ( slika 5a ).



Slika 5: Početna faza naizmjenične veličine: a) pozitivna ; b) negativna

Sa slike uočavamo da je grafik naizmjenične veličine pomjeren ulijevo u odnosu na koordinatni početak za određeni ugao  $\theta$  ( teta ).Dakle, **početna faza je pozitivna kada je grafik posmatrane veličine pomjeren ulijevo u odnosu na koordinatni početak .**

Pretpostavimo sada da je početak promatranja naizmjenične veličine negdje između položaja 1 i položaja 4, na slici 4.Na slici 5b. uočavamo da je grafik posmatrane veličine pomjeren udesno u odnosu na koordinatni početak, a početna faza je negativna.Dakle, **početna faza je negativna kada je grafik posmatrane veličine pomjeren udesno u odnosu na koordinatni početak .**

Iz svega navedenog možemo zaključiti da za početno vrijeme ( t = 0 ), posmatrana naizmjenična veličina može imati bilo koju od svojih trenutnih vrijednosti u toku jednog perioda.

## 2.5 KRUŽNA FREKVENCIJA

Osim u " ° " električni ugao se može predstaviti i tzv. **lučnom mjerom** ili **radijanima** .Radi lakšeg razumijevanja mjerenja ugla radijanima posmatrajmo kružnicu na slici 6.Poluprečnik ovakve kružnice jednak je jedinici ( r = 1 ) i ona se naziva **jedinična kružnica** .S obzirom da je poluprečnik jednak jedinici, obim kružnice (  $2\pi$  ) predstavlja puni luk .

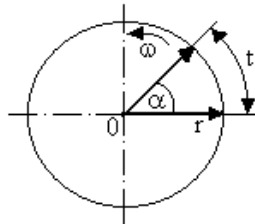
Dakle, obim ovakve kružnice iznosi:

$$2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi \quad \text{radijana, odnosno}$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad \text{iz čega slijedi:}$$

$$1 \text{ radijan} = 57^\circ 17' 44,8''$$

**Jedan radijan odgovara uglu čiji je kružni luk jednak poluprečniku kružnice .**



Slika 6: Jedinična kružnica

Pretpostavimo da se jedinični poluprečnik obrće oko tačke " 0 " i da je brzina obrtanja konstantna. Za jedan puni obrtaj, koji odgovara geometrijskom uglu  $360^\circ = 2\pi$  radijana, potrebno je vrijeme  $T$  koje odgovara vremenu od jednog perioda. Pri istim uslovima poluprečnik će opisati luk koji odgovara uglu  $\alpha$  za proporcionalno kraće vrijeme  $t$ . Proporcionalnost opisanog luka i vremena potrebnog da se on opiše, matematički se može izraziti kao:

$$2\pi : T = \alpha : t \quad \text{ili} \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{\alpha}{t}$$

Količnik  $\frac{\alpha}{t}$  se naziva **ugaona brzina**, a ona se u elektrotehnici naziva **kružna frekvencija**, odnosno:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\alpha}{t} \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Pošto je  $T = \frac{1}{f}$  imamo:

$$\omega = 2\pi f$$

Pošto smo se upoznali sa osnovnim karakteristikama naizmjeničnih veličina, sada možemo napisati osnovne matematičke jednačine za trenutne vrijednosti induciranog napona, odnosno struje:

$$u = U_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin 2\pi f t$$

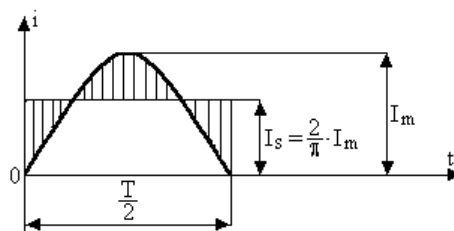
$$i = I_m \cdot \sin \omega t = I_m \cdot \sin 2\pi f t$$

### 3. SREDNJA I EFEKTIVNA VRIJEDNOST NAIZMJENIČNE STRUJE

#### 3.1 SREDNJA VRIJEDNOST

*Pošto je kod sinusoidalne struje površina pozitivnog poluperioda jednaka površini negativnog poluperioda, srednja matematička vrijednost struje, za ma koji broj cijelih perioda, jednaka je nuli .*

Međutim, za električne potrošače čiji je rad ovisan od smijera struje potrebno je prethodno izvršiti ispravljanje naizmjenične u istosmjernu struju. S obzirom da se ispravljanjem naizmjenične struje uspostavlja samo jedan smjer, srednja vrijednost struje  $I_s$  se određuje za interval između dvije nulte vrijednosti. Na slici 7. je predstavljena pozitivna poluperioda naizmjenične struje.



Slika 7: Srednja vrijednost naizmjenične sinusoidalne struje za polovinu perioda

Površina omeđena krivuljom struje  $i$  vremenskom osom, u intervalu  $T/2$  , predstavlja odgovarajuću količinu elektriciteta  $Q$  .

Ovu površinu možemo transformisati u ekvivalentnu površinu pravougaonika čija je osnovica  $T/2$ , a visina  $0,637 I_m$ . Ova visina predstavlja srednju vrijednost sinusoidalne struje (koja fizikalno ne postoji), a njena vrijednost u odnosu na maksimalnu vrijednost iznosi:

$$I_{sr} = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,637 \cdot I_m$$

**Srednja, matematička, vrijednost naizmjenične struje je brojno jednaka istosmjernoj struji, konstantne jačine, pri kojoj bi za vrijeme polovine perioda ( $T/2$ ) kroz kolo protekla ista količina elektriciteta ( $Q$ ) kao i pri posmatranoj naizmjeničnoj struji.**

Analogno je srednja vrijednost naizmjeničnog napona:

$$U_{sr} = \frac{2}{\pi} \cdot U_m = 0,637 \cdot U_m$$

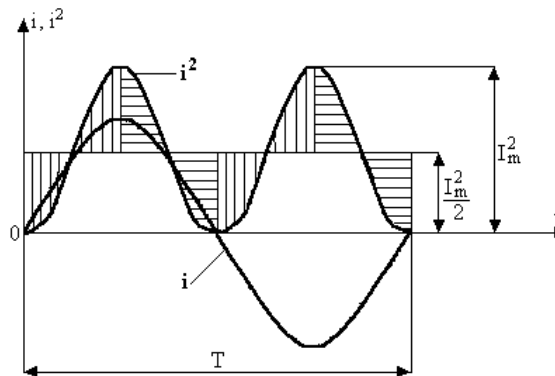
### 3.2 EFEKTIVNA VRIJEDNOST

Efektivno djelovanje naizmjenične struje izražava se poređenjem sa efektivnim djelovanjem istosmjerne struje, odgovarajuće jačine. Dakle, **efektivna vrijednost naizmjenične struje brojno je jednaka istosmjernoj struji konstantne jačine koja u strujnom kolu razvija istu količinu toplote kao i posmatrana naizmjenična struja.**

Radi određivanja brojčane zavisnosti efektivne vrijednosti naizmjenične struje, potrebno je izračunati količine toplote koje razvijaju istosmjerna i naizmjenična struja. Količina toplote koju razvija istosmjerna struja  $I$  na otporniku  $R$  za vrijeme  $T$  određuje se prema Džulovom zakonu kao:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot T$$

Da bismo odredili količinu toplote koju razvija naizmjenična struja posmatrajmo dijagram na slici 8.



Slika 8: Dijagram trenutnih vrijednosti kvadrata naizmjenične struje

Sa slike je vidljivo da grafik kvadrata naizmjenične struje ima stalno pozitivnu vrijednost, a pošto je snaga funkcija kvadrata struje, znači da snaga ima stalan smjer.

Toplota proizvedena naizmjeničnom strujom na otporniku  $R$  za vrijeme  $T$  jednaka je površini ograničenoj vremenskom osom  $t$  (u intervalu  $T$ ) i krivom koja predstavlja kvadrat naizmjenične struje.

Ova površina jednaka je površini pravougaonika čija je osnovica  $T$ , a visina  $\frac{I_m^2}{2}$ .

Dakle, količina toplote koju razvija naizmjenična struja na otporniku  $R$  za vrijeme  $T$  jednaka je:

$$Q \sim = \frac{I_m^2}{2} \cdot R \cdot T$$

Ako izjednačimo izraze za količinu toplote istosmjerne i naizmjenične struje dobijamo:

$$I^2 \cdot R \cdot T = \frac{I_m^2}{2} \cdot R \cdot T$$

Nakon dijeljenja dobijenog izraza sa  $RT$ , slijedi:

$$I^2 = \frac{I_m^2}{2} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m}$$

Dakle, **efektivna vrijednost naizmjenične struje je za  $\sqrt{2}$  puta manja od njene maksimalne vrijednosti**.

Analogno je efektivna vrijednost naizmjeničnog napona:

$$\boxed{U_{\text{ef}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m}$$

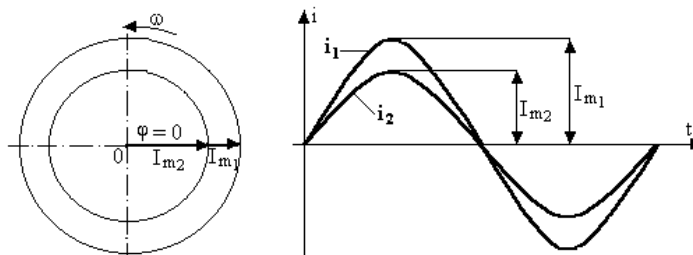
U praksi se uvijek koriste efektivne vrijednosti naizmjenične struje i napona. U svim slučajevima kada se navode vrijednosti struje i napona, podrazumijeva se da se radi o efektivnim vrijednostima. Najveći broj mjernih instrumenata se baždari u efektivnim vrijednostima struje i napona.

## 4. FAZNI ODNOSI

Pri proučavanju fizičkih procesa u kolima naizmjenične struje možemo uočiti da naizmjenične veličine jednake frekvencije prolaze u isto ili različito vrijeme kroz svoje karakteristične vrijednosti (nulte i maksimalne).

### 4.1 FAZNA JEDNAKOST

**Za dvije ili više naizmjeničnih veličina koje se mijenjaju po istom sinusnom zakonu, sa istom frekvencijom i koje istovremeno prolaze kroz svoje nulte i maksimalne vrijednosti, poklapajući se po smjeru, kažemo da imaju jednake faze, odnosno kažemo da se nalaze u fazi.**



Slika 9: Dijagram dviju struja jednakih faza

Dakle, dvije naizmjenične struje (slika 9), koje se nalaze u fazi, imat će početne fazne uglove, kao i uglove koji određuju trenutni položaj u svakom trenutku, jednake vrijednosti. Matematički izrazi za trenutne vrijednosti ovih struja su:

$$i_1 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \theta_1) = I_{1m} \cdot \sin \alpha_1$$

$$i_2 = I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \theta_2) = I_{2m} \cdot \sin \alpha_2$$

gdje su:  $\theta_1$  i  $\theta_2$  - početni fazni uglovi

$$\alpha_1 = (\omega t + \theta_1) \quad \text{i} \quad \alpha_2 = (\omega t + \theta_2) - \text{fazni uglovi (u radijanima)}$$

**Razlika početnih faznih uglova naziva se fazni pomak ( $\varphi$ ), odnosno:**

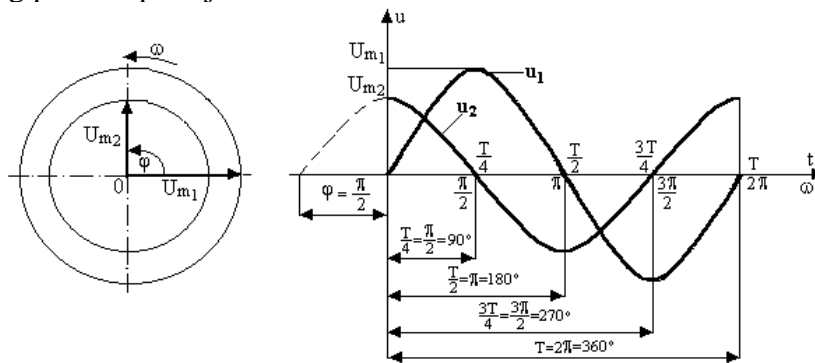
$$\boxed{\varphi = \theta_2 - \theta_1}$$

**Uslov fazne jednakosti je  $\varphi = 0$  odnosno  $\theta_1 = \theta_2$ .**

### 4.2 FAZNA RAZLIKA

**Za dvije ili više naizmjeničnih veličina koje se mijenjaju po istom sinusnom zakonu, sa istom frekvencijom, poklapajući se po smjeru, ali koje ne prolaze istovremeno kroz svoje nulte i maksimalne vrijednosti, kažemo da između njih postoji fazna razlika, odnosno kažemo da su fazno pomjerene.**

Dakle, veličine koje su fazno pomjerene, a imaju jednaku frekvenciju, zadržavaju isti međusobni položaj u toku cijelog procesa promjena .



Slika 10: Dijagram dvaju napona različitih faza

Dva naizmjenična napona ( slika 10 ), koji se ne nalaze u fazi, imat će početne fazne uglove, kao i uglove koji određuju trenutni položaj u svakom trenutku, različite .Matematički izrazi za trenutne vrijednosti ovih napona su:

$$u_1 = U_{1m} \cdot \sin(\omega t + \theta_1)$$

$$u_2 = U_{2m} \cdot \sin(\omega t + \theta_2)$$

gdje su:  $\theta_1$  i  $\theta_2$  - početni fazni uglovi

Sa slike je vidljivo da je  $\theta_1 = 0$  i  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  pa je fazni pomak:  $\varphi = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Dakle, kao zaključak se može konstatovati da napon  $u_1$  fazno zaostaje za naponom  $u_2$  za ugao  $\frac{\pi}{2}$  odnosno, može se takođe reći da napon  $u_2$  fazno prednjači naponu  $u_1$  za ugao  $\frac{\pi}{2}$  .

Na osnovu ovoga možemo izvesti i slijedeću definiciju faznog pomaka:

**Vremenski interval koji prođe od trenutka u kojem je jedna veličina imala karakterističnu vrijednost, do trenutka u kojem druga veličina postigne istu takvu vrijednost naziva se fazni pomak .**

**Za veličinu čije karakteristične vrijednosti nastupaju ranije od odgovarajućih vrijednosti druge veličine, kaže se da fazno prednjači, a za drugu veličinu da fazno zaostaje .**

Fazni pomak postoji ne samo između istovrsnih veličina već i između različitih veličina, na primjer, između napona i struje ili struje i napona samoindukcije itd.

## 5. PREDSTAVLJANJE NAIZMJENIČNIH VELIČINA

### 5.1 PREDSTAVLJANJE U KOMPLEKSNOM OBLIKU

Američki naučnik Čarls Štajnec ( *Charles Steinmetz* ) je uveo u teoriju naizmjeničnih struja računsku metodu koja se zove *simbolička metoda* .Suština simboličke metode je u tome što se električne harmonijske veličine izražavaju kompleksnim brojevima, što omogućava rješavanje električnih kola primjenom algebarskih operacija.

#### a) Imaginarni brojevi

U algebri, pored realnih, postoje i *imaginarni brojevi*. **Imaginarni brojevi su kvadratni korijeni iz negativnih brojeva**.Uzmimo za primjer  $\pm\sqrt{-4}$  .Ovaj broj možemo transformisati kao:

$$\pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm 2 \cdot \sqrt{-1}$$

**Vrijednost  $\sqrt{-1}$  naziva se imaginarna jedinica.U elektrotehnici se obilježava slovom "j" .** Dakle, možemo pisati:

$$\boxed{j = \sqrt{-1}} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{j^2 = -1}$$

Iz gore navedene transformacije dobili smo realan broj  $\pm 2$  pomnožen sa  $\sqrt{-1}$  , pa opšti izraz za imaginarni broj glasi:  $\pm jb$

Imaginarni brojevi imaju vrijednosti između  $-j\infty$  i  $+j\infty$  .

b) Kompleksni brojevi

**Kompleksni broj se dobije kada se saberu ili oduzmu realni i imaginarni broj** . Kompleksan broj označavamo sa  $\bar{p}$  , pa opšti izraz za kompleksan broj u algebarskom obliku glasi:

$$\bar{p} = a + jb$$

gdje je:  $\bar{p}$  - kompleksan broj

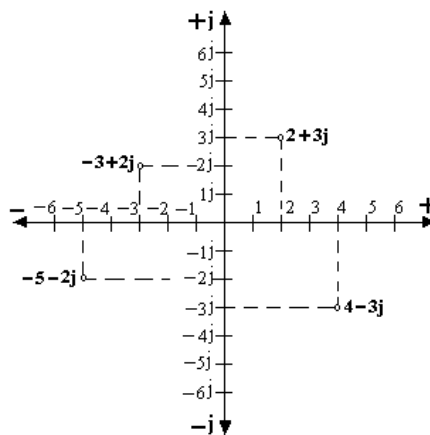
a – realni dio kompleksnog broja

b – imaginarni dio kompleksnog broja

j – imaginarna jedinica

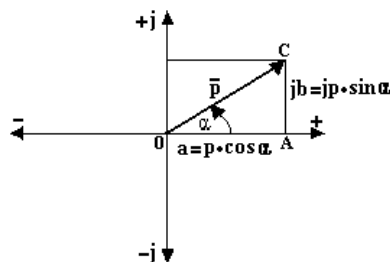
c) Grafičko predstavljanje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve predstavljamo grafički u pravouglom koordinatnom sistemu koji čini ravan koju nazivamo **kompleksna ili Gausova ravan** .Gausovu ravan čine dvije međusobno okomite ose. Na horizontalnoj osi ( apscisi ) nalaze se realni brojevi, a na vertikalnoj ( ordinati ) imaginarni brojevi ( slika 11 ) .



Slika 11: Gausova ( kompleksna ) ravan

Svakoj tački u kompleksnoj ravni pripada odgovarajući kompleksan broj.Realni brojevi se nalaze na apscisnoj osi ( realna osa ), a imaginarni na ordinatnoj osi ( imaginarna osa ).Dakle, svakom kompleksnom broju  $a \pm jb$  možemo pridružiti tačku u kompleksnoj ravni.



Slika 12: Predstavljanje kompleksnog broja pomoću vektora

**Kompleksan broj se može simbolički predstaviti u obliku vektora  $\bar{p}$**  ( slika 12 ).Početak vektora je tačka 0 , a kraj tačka C.Time je kompleksan broj dobio vektorsko značenje.**Dužina vektora** se označava sa  $|\bar{p}|$  i  **naziva se modul vektora** .Primjenjujući Pitagorinu teorem, modul vektore se može brojčano izraziti kao:

$$|\bar{p}|^2 = a^2 + b^2 \quad \text{odnosno} \quad |\bar{p}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pravac vektora, odnosno njegov položaj u kompleksnoj ravni određen je **uglom koji vektor zaklapa sa pozitivnim smjerom apscisne ose** i naziva se **argument** .On se određuje primjenom trigonometrijske funkcije kao:

$$\text{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{odnosno} \quad \alpha = \text{arctg} \frac{b}{a}$$

Modul vektora  $|\bar{p}|$  obilježavat ćemo velikim slovom  $P$ . Primjenom trigonometrijskih funkcija možemo odrediti komponente vektora ako su poznati njegov modul i argument:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{a}{P} \quad \text{odnosno} \quad \underline{a = P \cdot \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{b}{P} \quad \text{odnosno} \quad \underline{b = P \cdot \sin \alpha}$$

Uvrštavanjem dobijenih izraza dobijamo novi oblik izraza za vektor  $\bar{p}$  :

$$\boxed{\bar{p} = a + jb = P \cdot \cos \alpha + jP \cdot \sin \alpha = P \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha)}$$

**Dva kompleksna broja čije su realne i imaginarne vrijednosti jednake, a razlikuju se samo po predznaku ispred imaginarne vrijednosti nazivaju se konjugovano – kompleksni brojevi .**

Oni se označavaju kao:

$$\bar{p} = a + jb \quad \text{odnosno} \quad \boxed{\bar{p}^* = a - jb}$$

Proizvod konjugovano – kompleksnih brojeva daje realan broj tj.

$$\bar{p} \cdot \bar{p}^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2$$

## 5.2 PREDSTAVLJANJE U EKSPONENCIJALNOM OBLIKU

Koristeći uzajamnu vezu trigonometrijske i eksponencijalne funkcije ( Ojlerov obrazac ), izraz  $(\cos \alpha + j \sin \alpha)$  možemo predstaviti funkcijom  $e^{j\alpha}$  pa dobijamo kompleksan broj u eksponencijalnom obliku kao:

$$\boxed{\bar{p} = P \cdot e^{j\alpha}}$$

gdje je:  $e$  – baza prirodnog logaritma ( $e = 2,7218\dots$ )

$P$  – modul vektora  $\bar{p}$

$\alpha$  - ugao pod kojim je vektor zakrenut u odnosu na pozitivni smjer apscisne ose

Dakle, funkcija  $e^{j\alpha}$  može se predstaviti u trigonometrijskom obliku kao:

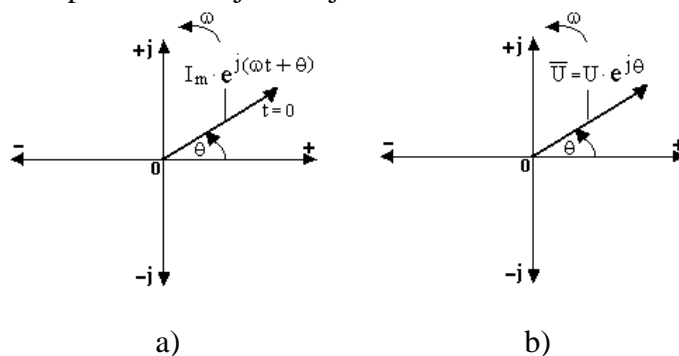
$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha}$$

Iz svega dosad navedenog proizilazi zaključak da **kompleksan broj možemo izraziti u :**

- **algebarskom obliku**  $\bar{p} = a + jb$
- **trigonometrijskom obliku**  $\bar{p} = P \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha)$
- **eksponencijalnom obliku**  $\bar{p} = P \cdot e^{j\alpha}$

## 5.3 PREDSTAVLJANJE SINUSOIDALNIH ELEKTRIČNIH VELIČINA

Pošto se kompleksni brojevi mogu prikazati vektorom, to znači da se i naizmjenične sinusoidalne veličine mogu prikazivati kompleksnim brojevima jer su i one vektori.



Slika 13: Grafičko predstavljanje u kompleksnoj ravni: a) struje ; b) napona

Na slici 31a. predstavljena je naizmjenična sinusoidalna struja u kompleksnoj ravni, a na slici 13b. predstavljen je naizmjenični sinusoidalni napon u kompleksnoj ravni.

Prema slici 13a. izraz za struju u kompleksnom obliku će biti:

$$I_m \cdot e^{j(\omega t + \theta)} = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta) + jI_m \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

Prema slici 13b. izraz za napon u kompleksnom obliku će biti:

$$\bar{U} = U \cdot e^{j\theta} = U \cdot (\cos \theta + j \sin \theta)$$

## **6. PRIMJERI PRORAČUNA NAIZMJENIČNIH VELIČINA**

**Primjer 1:** Ugao od 3,14 rad pretvoriti u električne stepene, minute i sekunde .

**Rješenje:**  $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,8'' = 57 + \frac{17}{60} + \frac{44,8}{3600} = 57 + 0,2833333 + 0,0124444 = \underline{57,295777^\circ}$

Dakle, imamo:  $3,14 \text{ rad} = 3,14 \cdot 57,2957777 = \underline{179,90873^\circ}$

$179,90873^\circ = 179^\circ$  ;  $0,90873 \cdot 60 = 54,5238'$  ;  $0,5238 \cdot 60 = 31,43''$

Na kraju imamo:  $\boxed{3,14 \text{ rad} = 179^\circ 54' 31,43''}$

**Primjer 2:** Ugao od 37,245° pretvoriti u radijane .

**Rješenje:**  $1 \text{ rad} = 57,295777^\circ$   
 $37,245^\circ = \frac{37,245}{57,295777} = 0,65$  tj.  $\boxed{37,245^\circ = 0,65 \text{ rad}}$

**Primjer 3:** Ugao od 61° 23' 36" pretvoriti u radijane .

**Rješenje:**  $61^\circ 23' 36'' = 61 + \frac{23}{60} + \frac{36}{3600} = 61 + 0,3833333 + 0,01 = \underline{61,393333^\circ}$   
 $61,393333^\circ = \frac{61,393333}{57,295777} = 1,07$  tj.  $\boxed{61^\circ 23' 36'' = 1,07 \text{ rad}}$

**Primjer 4:** Ugao od 12352" pretvoriti u minute, stepene i radijane .

**Rješenje:**  $12352'' = \frac{12352}{60} = 205,86666$  tj.  $\boxed{12352'' = 205,86666'}$   
 $12352'' = \frac{12352}{3600} = 3,4311111$  tj.  $\boxed{12352'' = 3,4311111^\circ}$   
 $12352'' = \frac{3,4311111}{57,295777} = 0,06$  tj.  $\boxed{12352'' = 0,06 \text{ rad}}$

Na kraju imamo:  $0,4311111^\circ = 0,4311111 \cdot 60 = 25,866666'$   
 $0,866666' = 0,866666 \cdot 60 = 52''$

Dakle, naš ugao je:  $\boxed{12352'' = 3^\circ 25' 52''}$

**Primjer 5:** Ugao od 34,12° pretvoriti u minute, sekunde i radijane .

**Rješenje:**  $34,12^\circ = 34,12 \cdot 60 = 2047,2$  tj.  $\boxed{34,12^\circ = 2047,2'}$   
 $34,12^\circ = 34,12 \cdot 3600 = 122.832$  tj.  $\boxed{34,12^\circ = 122.832''}$   
 $34,12^\circ = \frac{34,12}{57,295777} = 0,6$  tj.  $\boxed{34,12^\circ = 0,6 \text{ rad}}$

**Primjer 6:** Koliko je vrijeme trajanja jedne periode naizmjenične struje čija je frekvencija  $f = 25 \text{ Hz}$  ?

**Rješenje:**  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25} \Rightarrow \boxed{T = 0,04\text{s}}$

**Primjer 7:** Kolika je frekvencija naizmjenične veličine ako je njen period  $T = 0,1 \text{ s}$  ?

**Rješenje:**  $T = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1} \Rightarrow \boxed{f = 10\text{Hz}}$

**Primjer 8:** Koliki je period i kružna učestanost napona čija je frekvencija  $f = 40 \text{ Hz}$  ?

**Rješenje:**  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40} \Rightarrow \boxed{T = 0,025\text{s}}$   
 $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 40 \Rightarrow \boxed{\omega = 251,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$

**Primjer 9:** Ako je kružna učestanost  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  koliki je period i frekvencija naizmjenične veličine ?

**Rješenje:**  $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} \Rightarrow \boxed{f = 50\text{Hz}}$   
 $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{314} \Rightarrow \boxed{T = 0,02\text{s}}$

**Primjer 10:** Za koji ugao  $\alpha$  će se pomjeriti rotor generatora, za vrijeme  $t = 10^{-2} \text{ s}$  ako se obrće stalnom ugaonom brzinom  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ?

**Rješenje:**  $\alpha = \omega \cdot t = 314 \cdot 10^{-2} = 3,14\text{rad} = 3,14 \cdot 57,295777 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3,14\text{rad} = 180^\circ}$

**Primjer 11:** Ako se rotor generatora obrne za ugao  $\alpha = 90^\circ$ , za vrijeme  $t = 1 \text{ ms}$ , kolika je frekvencija napona koji se indukuje u njemu ?

**Rješenje:**  $\alpha = 90^\circ = \frac{90}{57,295777} \Rightarrow \underline{\alpha = 1,57\text{rad}}$   
 $\alpha = \omega \cdot t = 2\pi f \cdot t \Rightarrow f = \frac{\alpha}{2\pi \cdot t} = \frac{1,57}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3}} = \frac{1,57}{6,28} \cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{f = 0,25 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 0,25\text{kHz}}$

**Primjer 12:** Kompleksna veličina ima modul 6 a argument  $\frac{\pi}{2}$  radijana .Predočiti ovu veličinu u algebarskom, trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku .

**Rješenje:**  $a = P \cdot \cos \alpha = 6 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 6 \cdot 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$

$b = P \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 6 \cdot 1 \Rightarrow \underline{b = 6}$

$\bar{p} = a + jb = 0 + j6 \Rightarrow \boxed{\bar{p} = j6}$

$\bar{p} = P \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha) \Rightarrow \boxed{\bar{p} = 6 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})}$

$\bar{p} = P \cdot e^{j\alpha} \Rightarrow \boxed{\bar{p} = 6 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot e^{j90^\circ}}$

**Primjer 13:** Vrijednost napona data je u eksponencijalnom obliku kao  $\bar{U} = 220 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$ . Napisati izraz za trenutnu vrijednost napona u trigonometrijskom i algebarskom obliku.

**Rješenje:**  $\bar{U} = U \cdot e^{j\alpha} = U \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha) \Rightarrow \boxed{\bar{U} = 220 \cdot (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)}$

$$\bar{U} = 220 \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = 220 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}) = 220 \cdot (0,866 + j0,5) \Rightarrow \boxed{\bar{U} = 190,5 + j110}$$

**Primjer 14:** Naizmjenična struja data je u algebarskom obliku  $\bar{I} = 5 + 5j$ . Napisati izraz za vrijednost struje u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku.

**Rješenje:**  $\alpha = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{5}{5} = \arctg 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{25 \cdot 2} \Rightarrow \underline{I = 5 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\bar{I} = I \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha) \Rightarrow \boxed{\bar{I} = 5\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 5\sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})}$$

$$\bar{I} = I \cdot e^{j\alpha} \Rightarrow \boxed{\bar{I} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

**Primjer 15:** Maksimalna vrijednost naizmjenične struje je 28,2 A. Koliku vrijednost će pokazati ampermetar za naizmjeničnu struju?

**Rješenje:** Ampermetar pokazuje efektivnu vrijednost struje, pa je:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m = 0,707 \cdot 28,2 \Rightarrow \boxed{I_{ef} = 20A}$$

**Primjer 16:** Izračunati srednju i efektivnu vrijednost naizmjeničnog napona čija je maksimalna vrijednost  $U_m = 311$  V.

**Rješenje:**  $U_{sr} = \frac{2}{\pi} \cdot U_m = 0,637 \cdot U_m = 0,637 \cdot 311 \Rightarrow \boxed{U_{sr} = 198V}$

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m = 0,707 \cdot 311 \Rightarrow \boxed{U_{ef} = 220V}$$

**Primjer 17:** Odrediti trenutak  $t$  u kojem će sinusoidalni napon maksimalne vrijednosti  $U_m = 311$  V i kružne frekvencije  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  imati vrijednost jednaku efektivnoj.

**Rješenje:**  $u = U_m \cdot \sin \omega t = 311 \cdot \sin 314t$  ;  $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m = 0,707 \cdot 311 \Rightarrow \underline{U_{ef} = 220V}$

Izjednačavanjem ovih jednačina dobijamo:

$$311 \cdot \sin 314t = 220 \Rightarrow \sin 314t = \frac{220}{311} = 0,707 \Rightarrow 314t = \arcsin 0,707 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ odnosno,}$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{4}}{314} = \frac{\pi}{314 \cdot 4} = \frac{3,14}{1256} \Rightarrow \boxed{t = 25 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 2,5\text{ms}}$$

**Primjer 18:** Matematički izraz za trenutnu vrijednost struje je  $i = I_m \cdot \sin 314t$ . Odrediti trenutak  $t$  u kojem je trenutna vrijednost struje jednaka njenoj srednjoj vrijednosti.

**Rješenje:**  $i = I_m \cdot \sin 314t$  ;  $I_{sr} = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,637 \cdot I_m$

Izjednačavanjem ovih jednačina dobijamo:

$$I_m \cdot \sin 314t = 0,637 \cdot I_m \Rightarrow \sin 314t = 0,637 \Rightarrow 314t = \arcsin 0,637 = 0,6908 \quad \text{odnosno,}$$

$$t = \frac{0,6908}{314} \Rightarrow \boxed{t = 22 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 2,2 \text{ ms}}$$

**Primjer 19:** Matematički izraz za trenutnu vrijednost struje je  $i = I_m \cdot \sin 628t$ . Izračunati maksimalnu, srednju i efektivnu vrijednost struje ako je njena trenutna vrijednost  $i = 1,41 \text{ A}$  u trenutku  $t = 125 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ .

**Rješenje:**  $i = I_m \cdot \sin 628t \Rightarrow I_m = \frac{i}{\sin 628t} = \frac{1,41}{\sin(628 \cdot 125 \cdot 10^{-5})} = \frac{1,41}{\sin 0,785} \Rightarrow \boxed{I_m = 2 \text{ A}}$

$$I_{\text{sr}} = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,637 \cdot I_m = 0,637 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{I_{\text{sr}} = 1,274 \text{ A}}$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m = 0,707 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{I_{\text{ef}} = 1,414 \text{ A}}$$

**Primjer 20:** Data su naponi trenutnih vrijednosti  $u_1 = 311 \cdot \sin(314t + \frac{\pi}{4})$ ,  $u_2 = 155,5 \cdot \sin(314t - \frac{\pi}{6})$ .

- Odrediti: a) srednje i efektivne vrijednosti tih napona  
b) frekvencije i periode tih napona  
c) fazni pomak između tih napona

**Rješenje:** a)  $U_{1\text{sr}} = 0,637 \cdot U_{1\text{m}} = 0,637 \cdot 311 \Rightarrow \boxed{U_{1\text{sr}} = 198 \text{ V}}$

$$U_{2\text{sr}} = 0,637 \cdot U_{2\text{m}} = 0,637 \cdot 155,5 \Rightarrow \boxed{U_{2\text{sr}} = 99 \text{ V}}$$

$$U_{1\text{ef}} = 0,707 \cdot U_{1\text{m}} = 0,707 \cdot 311 \Rightarrow \boxed{U_{1\text{ef}} = 220 \text{ V}}$$

$$U_{2\text{ef}} = 0,707 \cdot U_{2\text{m}} = 0,707 \cdot 155,5 \Rightarrow \boxed{U_{2\text{ef}} = 110 \text{ V}}$$

b) Pošto je ugaona brzina ista za oba napona, znači da su i njihove frekvencije i periodi isti:

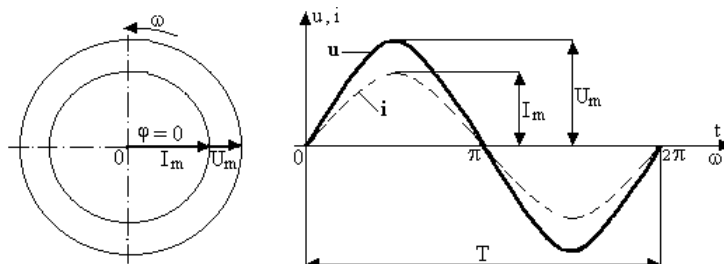
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} \Rightarrow \boxed{f_1 = f_2 = 50 \text{ Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2 = 0,02 \text{ s}}$$

c)  $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \left[ \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + 2\pi}{12} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{5\pi}{12} \text{ radijana} = 75^\circ}$

## 7. OTPOR U KOLU NAIZMJENIČNE STRUJE

Otpornost u kolu naizmjenične struje se naziva **aktivna otpornost**. Ona je u kolima naizmjenične struja veća nego u kolima istosmjernje struje zbog povećanih gubitaka koji nastaju usljed površinskog efekta, histerezisa i sl. **U kolu naizmjenične struje sa čisto aktivnim otporom, napon i jačina struje mijenjaju se po istom zakonu i istovremeno prolaze kroz svoje karakteristične tačke. Dakle, napon i struja se u kolima sa čisto aktivnom otpornosti nalaze u fazi** (slika 14).



Slika 14: Dijagram struje i napona za kolo sa aktivnim otporom

Ako kroz otpor  $R$  teče sinusna struja  $i = I_m \cdot \sin \omega t$ , onda na otporu vlada napon:

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin \omega t$$

Vidimo da **za maksimalne vrijednosti** struje  $i$  i napona **vrijedi Ohm zakon**, odnosno:

$$U_m = R \cdot I_m \quad \text{tj.} \quad \boxed{I_m = \frac{U_m}{R}}$$

Takođe, možemo pokazati da **za efektivne vrijednosti** struje  $i$  i napona **vrijedi Ohm zakon**:

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \cdot R} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{I_{\text{ef}} = \frac{U_{\text{ef}}}{R}}$$

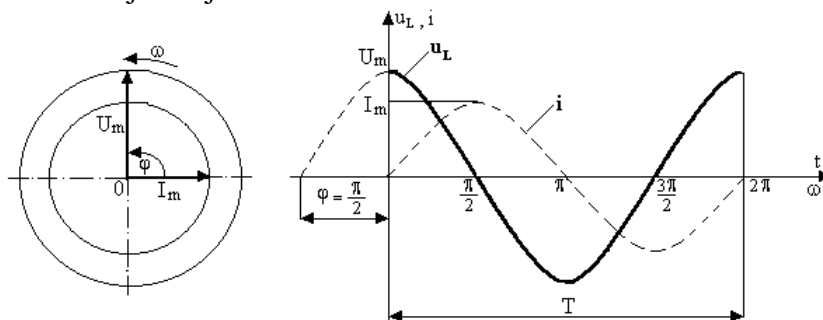
**Aktivna otpornost** u kolu naizmjenične struje se naziva **i rezistansa**, a **otpor rezistor**. Recipročna vrijednost otpora se naziva **aktivna provodnost** ili **konduktansa**:

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{pa možemo pisati:}$$

$$\boxed{I_m = G \cdot U_m} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{I_{\text{ef}} = G \cdot U_{\text{ef}}}$$

## 8. INDUKTIVITET U KOLU NAIZMJENIČNE STRUJE

Induktivitet (zavojnica, svitak) ima sposobnost da pri proticanju naizmjenične struje vrši koncentraciju magnetne energije u prostoru oko zavojnice i unutar zavojnice. Zbog toga zavojnica, pored omskog otpora, pruža naizmjeničnoj struji dodatni otpor. Dijagram struje i napona na induktivitetu, kroz koji protiče naizmjenična struja dat je na slici 15.



Slika 15: Dijagram struje i napona za kolo sa induktivitetom

Ako kroz induktivitet  $L$  teče sinusna struja  $i = I_m \cdot \sin \omega t$ , tada se napon na induktivitetu dobija složenim matematičkim postupkom:

$$u_L = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos \omega t = U_m \cdot \cos \omega t$$

Vidimo da **za maksimalne vrijednosti** struje  $i$  i napona **vrijedi Ohm zakon**, odnosno:

$$U_m = \omega \cdot L \cdot I_m \quad \text{tj.} \quad I_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

Veličina  $\omega L$  ima karakter otpornosti i izražava protivljenje (reakciju) zavojnice promjeni jačine struje u njoj, pa se zbog toga naziva **reaktivna induktivna otpornost** ili **induktivna reaktansa**:

$$\boxed{X_L = \omega L = 2\pi f L}$$

Dakle, **za maksimalne i efektivne vrijednosti** struje  $i$  i napona **vrijedi Ohm zakon** u obliku:

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{X_L}} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{I_{\text{ef}} = \frac{U_{\text{ef}}}{X_L}}$$

Recipročna vrijednost induktivnog otpora naziva se **reaktivna induktivna provodnost** ili **induktivna susceptansa**:

$$\boxed{B_L = \frac{1}{X_L}}$$

Sada možemo pisati:

$$\boxed{I_m = B_L \cdot U_m} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{I_{ef} = B_L \cdot U_{ef}}$$

Sa slike 15. je vidljivo da *u kolima naizmjenične struje, sa čisto induktivnom otpornošću, napon na induktivitetu fazno prednjači struji za 90°, odnosno, struja kroz induktivitet fazno kasni za naponom za 90°*.

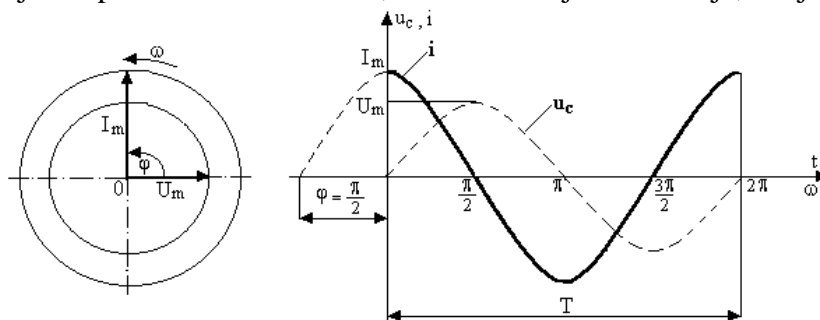
**NAPOMENA:** Otpor idealne zavojnice u kolu istosmjerne struje je nula ( $f = 0 \Rightarrow \omega L = X_L = 0$ ), pa se idealna zavojnica u kolu istosmjerne struje ponaša kao kratak spoj.

## 9. KAPACITET U KOLU NAIZMJENIČNE STRUJE

Ako na kondenzator priključimo naizmjenični napon, s obzirom da se vrijednost tog napona stalno mijenja po zakonu sinusa, možemo zaključiti da će se u kolu naizmjenične struje sa kondenzatorom vršiti trajan proces periodičnog "punjenja" i "pražnjenja" kondenzatora. U kolu sa kondenzatorom teče naizmjenična struja, ali to ne znači da struja prolazi kroz dielektrik kondenzatora već da je ona posljedica trajne periodične izmjene određene količine elektriciteta između izvora električne struje i kondenzatora. S obzirom da se polaritet ploča kondenzatora mijenja proporcionalno frekvenciji, to se i smjer električnog polja mijenja isto toliko puta, pa nastaje oscilatorno pomjeranje naelektrisanih čestica koje na taj način čine tzv. *struju dielektričnog pomjeraja*.

Dakle, *u kolu naizmjenične struje sa kondenzatorom, pored provodne (konduktivne) struje u provodnicima kola, postoji i struja dielektričnog pomjeraja u dielektriku kondenzatora*.

Dijagram struje i napona na kondenzatoru, u kolu naizmjenične struje, dat je na slici 16.



Slika 16: Dijagram struje i napona za kolo sa kondenzatorom

Ako se na kapacitet  $C$  priključi sinusni napon  $u_c = U_m \cdot \sin \omega t$ , tada se struja kroz kapacitet dobija složenim matematičkim postupkom:

$$i_C = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \cdot \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \omega C U_m \cdot \cos \omega t = I_m \cdot \cos \omega t$$

Vidimo da **za maksimalne vrijednosti** struje i napona **vrijedi Omov zakon**, odnosno:

$$I_m = \omega \cdot C \cdot U_m \quad \text{tj.} \quad U_m = \frac{I_m}{\omega C}$$

Veličina  $\frac{1}{\omega C}$  ima karakter otpornosti i naziva se **reaktivna kapacitivna otpornost** ili **kapacitivna reaktansa**:

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}}$$

Dakle, **za maksimalne i efektivne** vrijednosti struje i napona vrijedi Omov zakon u obliku:

$$\boxed{U_m = \frac{I_m}{X_C}} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{U_{ef} = \frac{I_{ef}}{X_C}}$$

Recipročna vrijednost kapacitivnog otpora naziva se **reaktivna kapacitivna provodnost** ili **kapacitivna susceptansa**:

$$\boxed{B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C}$$

Sada možemo pisati:

$$\boxed{I_m = B_C \cdot U_m} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{I_{ef} = B_C \cdot U_{ef}}$$

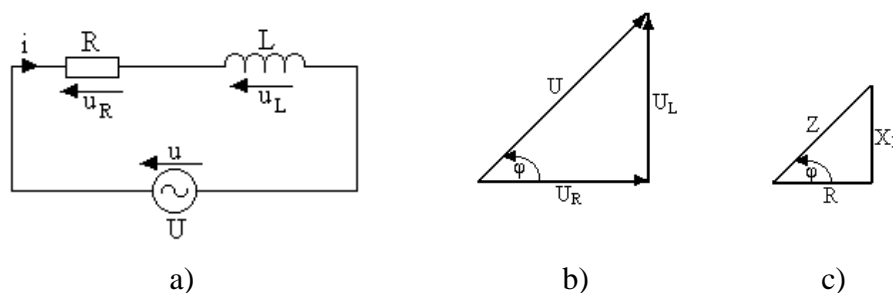
Sa slike 16. je vidljivo da *u kolima naizmjenične struje, sa čisto kapacitivnom otpornošću, struja na kapacitetu fazno prednjači naponu za 90°, odnosno, napon na kapacitetu fazno kasni za strujom za 90°*.

**NAPOMENA:** Otpor idealnog kondenzatora u kolu istosmjerne struje je  $\infty$  ( $f = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega C} = X_C = \infty$ ),

pa se idealni kondenzator u kolu istosmjerne struje ponaša kao prekid kola .

## 10. OTPOR I INDUKTIVITET U KOLU NAIZMJENIČNE STRUJE

### 10.1 SERIJSKI RL SPOJ



Slika 17: Serijski RL spoj: a) šema spoja ; b) trougao napona ; c) trougao otpornosti

Realna zavojnica se, pored induktivnosti, karakteriše nekom aktivnom otpornošću i može se predstaviti u obliku kola sa redno spojenom aktivnom i induktivnom otpornošću ( slika 17a ). Priklučeni napon se raspodjeljuje na pad napona na aktivnom otporu  $U_R$  i pad napona na induktivitetu  $U_L$ . Pad napona  $U_R$  je u fazi sa strujom koja protiče kroz kolo, a pad napona  $U_L$  fazno prednjači struji kroz kolo za 90°. Poznajući takve naponske odnose dobijamo dijagram napona ( trougao napona ) kao na slici 17b.

Napon  $U$ , na priključcima, se određuje primjenom Pitagorine teoreme za trougao kao:

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 \quad \text{odnosno} \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

Na temelju Omovog zakona možemo pisati:

$$U_R = I \cdot R \quad \text{i} \quad U_L = I \cdot X_L$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednačinu za napone dobijamo:

$$U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L)^2} = \sqrt{I^2 \cdot (R^2 + X_L^2)} = I \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za efektivnu vrijednost struje u kolu:

$$\boxed{I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}$$

Izraz u nazivniku predstavlja ukupni otpor kola i naziva se **impedansa kola** :

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

Dakle, vidimo da za serijsko RL kolo vrijedi Omov zakon u obliku:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Pošto su otpornosti u kolu proporcionalne naponima, trougao napona možemo transformisati u trougao otpornosti ( slika 17c ). Vrijednosti otpora na zavise od vremena pa stranice trougla otpora nisu vektori, nego duži, koje u pogodnom mjerilu predstavljaju električni otpor u omima. Pri poznatim vrijednostima  $Z$  i  $R$  primjenom trigonometrijske funkcije  $\cos \varphi$  za trougao dobijamo:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \Rightarrow \boxed{\varphi = \arccos \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}$$

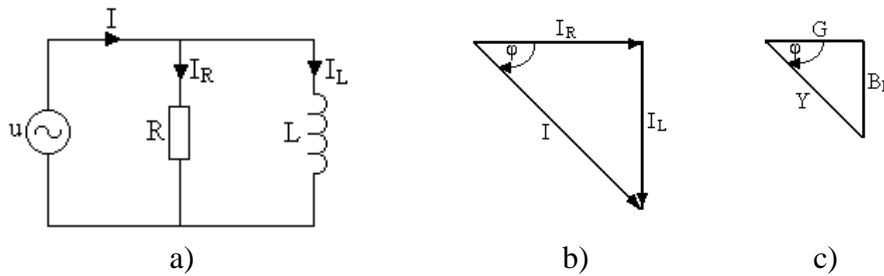
Ako su nam poznate vrijednosti induktivnog i omskog otpora, primjenom trigonometrijske funkcije  $\operatorname{tg}\varphi$  dobijamo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L}{R} \Rightarrow \boxed{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}}$$

Dakle, *struja u rednom RL kolu fazno zaostaje za priključenim naponom za ugao  $\varphi$  koji je veći od nule, ali manji od  $90^\circ$ , a koji zavisi od odnosa aktivne i induktivne otpornosti tj.*

$$\boxed{0^\circ < \varphi < 90^\circ}$$

## 10.2 PARALELNI RL SPOJ



Slika 18: Paralelni RL spoj: a) šema spoja ; b) trougao struja ; c) trougao provodnosti

Posmatrajmo šemu na slici 18a. U grani sa aktivnom otpornošću protiče aktivna struja  $I_R$  koja je u fazi sa priključenim naponom. U grani sa induktivnom otpornošću protiče reaktivna struja  $I_L$  koja fazno zaostaje za priključenim naponom za  $90^\circ$ . Ukupna struja je jednaka dijagonali pravougaonika konstruisanog na aktivnoj i reaktivnoj struji (trougao struja, slika 18b).

Ukupna struja  $I$  se određuje primjenom Pitagorine teoreme za trougao kao:

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2 \quad \text{odnosno} \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

Na temelju Omovog zakona možemo pisati:

$$I_R = G \cdot U \quad \text{i} \quad I_L = B_L \cdot U$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednačinu za struje dobijamo:

$$I = \sqrt{(G \cdot U)^2 + (B_L \cdot U)^2} = \sqrt{U^2 \cdot (G^2 + B_L^2)} = U \cdot \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za efektivnu vrijednost napona u kolu:

$$\boxed{U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + B_L^2}}}$$

Izraz u nazivniku predstavlja ukupnu provodnost kola i naziva se **admitansa kola** :

$$\boxed{Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}}$$

Dakle, vidimo da za paralelno RL kolo vrijedi Omov zakon u obliku:

$$U = \frac{I}{Y}$$

Pošto su provodnosti u kolu proporcionalne strujama, trougao struja možemo transformisati u trougao provodnosti (slika 18c). Vrijednosti provodnosti na zavise od vremena pa stranice trougla provodnosti nisu vektori, nego duži, koje u pogodnom mjerilu predstavljaju električnu provodnost u simensima. Pri poznatim vrijednostima  $Y$ ,  $G$  i  $B_L$  primjenom trigonometrijskih funkcija za trougao dobijamo:

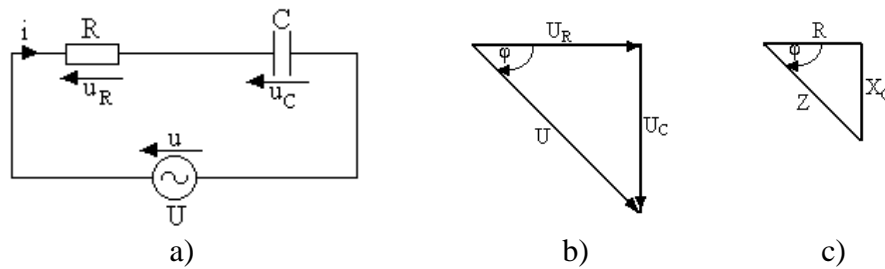
$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{G}{Y}} ; \quad \boxed{\varphi = \arcsin \frac{B_L}{Y}} ; \quad \boxed{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_L}{G}}$$

Dakle, *struja u paralelnom RL kolu fazno zaostaje za priključenim naponom za ugao  $\varphi$  koji je veći od nule, ali manji od  $90^\circ$ , a koji zavisi od odnosa aktivne i induktivne provodnosti tj.*

$$\boxed{0^\circ < \varphi < 90^\circ}$$

## 11. OTPOR I KAPACITET U KOLU NAIZMJENIČNE STRUJE

### 11.1 SERIJSKI RC SPOJ



Slika 19: Serijski RC spoj: a) šema spoja ; b) trougao napona ; c) trougao otpornosti

Realni kondenzator se, pored kapacitivnosti, karakteriše nekom aktivnom otpornošću i može se predstaviti u obliku kola sa spojenom aktivnom i kapacitivnom otpornošću ( slika 19a ). Priklučeni napon se raspodjeljuje na pad napona na aktivnom otporu  $U_R$  i pad napona na kapacitetu  $U_C$ . Pad napona  $U_R$  je u fazi sa strujom koja protiče kroz kolo, a pad napona  $U_C$  fazno zaostaje za strujom u kolu za  $90^\circ$ . Poznajući takve naponske odnose dobijamo dijagram napona ( trougao napona ) kao na slici 19b.

Napon  $U$ , na priključcima, se određuje primjenom Pitagorine teoreme za trougao kao:

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 \quad \text{odnosno} \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

Na temelju Omovog zakona možemo pisati:

$$U_R = I \cdot R \quad \text{i} \quad U_C = I \cdot X_C$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednačinu za napone dobijamo:

$$U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_C)^2} = \sqrt{I^2 \cdot (R^2 + X_C^2)} = I \cdot \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za efektivnu vrijednost struje u kolu:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

Izraz u nazivniku predstavlja ukupni otpor ili impedansu kola:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Dakle, vidimo da za serijsko RC kolo vrijedi Omov zakon u obliku:

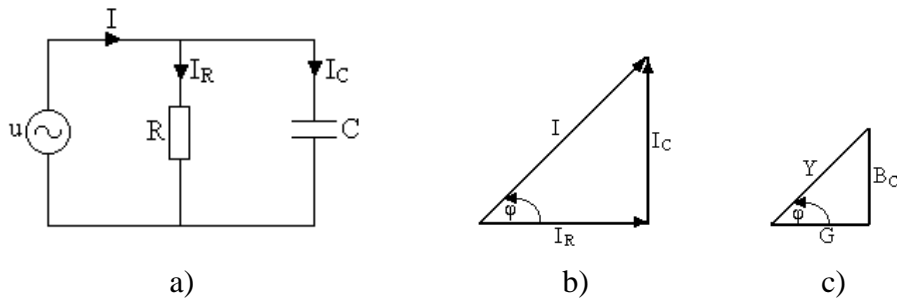
$$I = \frac{U}{Z}$$

Pošto su otpornosti u kolu proporcionalne naponima, trougao napona možemo transformisati u trougao otpornosti ( slika 19c ). Vrijednosti otpora na zavise od vremena pa stranice trougla otpora nisu vektori, nego duži, koje u pogodnom mjerilu predstavljaju električni otpor u omima. Pri poznatim vrijednostima  $R$ ,  $X_C$  i  $Z$  primjenom trigonometrijskih funkcija za trougao dobijamo:

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{R}{Z}} \quad ; \quad \boxed{\varphi = \arcsin \frac{X_C}{Z}} \quad ; \quad \boxed{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_C}{R}}$$

Dakle, **struja u rednom RC kolu fazno prednjači priključenom naponu za ugao  $\varphi$  koji je veći od nule, ali manji od  $-90^\circ$ , a koji zavisi od odnosa aktivne i kapacitivne otpornosti tj.**

$$\boxed{0^\circ < \varphi < -90^\circ}$$

**11.2 PARALELNI RC SPOJ**

Slika 20: Paralelni RC spoj: a) šema spoja ; b) trougao struja ; c) trougao provodnosti

Posmatrajmo šemu na slici 20a. U grani sa aktivnom otpornošću protiče aktivna struja  $I_R$  koja je u fazi sa priključenim naponom. U grani sa kapacitivnom otpornošću protiče reaktivna struja  $I_C$  koja fazno prednjači priključenom naponu za  $90^\circ$ . Ukupna struja je jednaka dijagonali pravougaonika konstruisanog na aktivnoj i reaktivnoj struji (trougao struja, slika 20b).

Ukupna struja  $I$  se određuje primjenom Pitagorine teoreme za trougao kao:

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 \quad \text{odnosno} \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

Na temelju Omovog zakona možemo pisati:

$$I_R = G \cdot U \quad \text{i} \quad I_C = B_C \cdot U$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednačinu za struje dobijamo:

$$I = \sqrt{(G \cdot U)^2 + (B_C \cdot U)^2} = \sqrt{U^2 \cdot (G^2 + B_C^2)} = U \cdot \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za efektivnu vrijednost napona u kolu:

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + B_C^2}}$$

Izraz u nazivniku predstavlja ukupnu provodnost ili admitansu kola:

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

Dakle, vidimo da za paralelno RC kolo vrijedi Omov zakon u obliku:

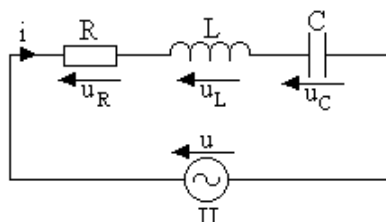
$$U = \frac{I}{Y}$$

Pošto su provodnosti u kolu proporcionalne strujama, trougao struja možemo transformisati u trougao provodnosti (slika 20c). Vrijednosti provodnosti na zavise od vremena pa stranice trougla provodnosti nisu vektori, nego duži, koje u pogodnom mjerilu predstavljaju električnu provodnost u simensima. Pri poznatim vrijednostima  $Y$ ,  $G$  i  $B_C$  primjenom trigonometrijskih funkcija za trougao dobijamo:

$$\varphi = \arccos \frac{G}{Y} \quad ; \quad \varphi = \arcsin \frac{B_C}{Y} \quad ; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_C}{G}$$

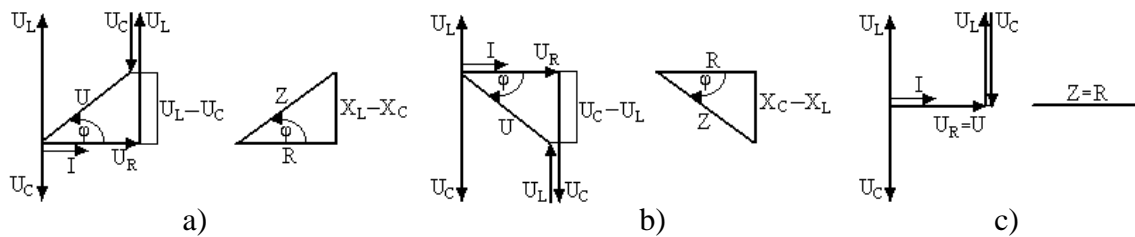
Dakle, struja u paralelnom RC kolu fazno prednjači priključenom naponu za ugao  $\varphi$  koji je veći od nule, ali manji od  $-90^\circ$ , a koji zavisi od odnosa aktivne i kapacitivne provodnosti tj.

$$0^\circ < \varphi < -90^\circ$$

**12. OTPOR, INDUKTIVITET I KAPACITET U KOLU SINUSNE STRUJE****12.1 SERIJSKI RLC SPOJ**

Slika 21: Šema serijskog RLC kola

Za serijski RLC spoj, ( slika 21 ), je karakteristično da se priključeni napon raspodjeljuje na pad napona na aktivnom otporu  $U_R$ , pad napona na induktivitetu  $U_L$  i pad napona na kapacitetu  $U_C$ . Pad napona  $U_R$  je u fazi sa strujom koja protiče kroz kolo, pad napona  $U_L$  fazno prednjači struji kroz kolo za  $90^\circ$ , dok pad napona  $U_C$  fazno kasni za strujom kroz kolo za  $90^\circ$ . Poznajući takve naponske odnose dobijamo dijagrame napona i otpornosti ( trouglovi napona i otpornosti) kao na slici 22.



Slika22: Trouglovi napona i otpornosti: a)  $X_L > X_C$  ; b)  $X_L < X_C$  ; c)  $X_L = X_C$

U zavisnosti od odnosa reaktivnih otpora  $X_L$  i  $X_C$  postoje tri karakteristična slučaja:

1. Ako je  $X_L > X_C$ , tada je  $U_L > U_C$  ( slika 22a ) pa kažemo da je spoj **induktivnog karaktera**, a napon  $U$  prednjači struji za ugao  $\varphi > 0$ .
2. Ako je  $X_L < X_C$ , tada je  $U_L < U_C$  ( slika 22b ) pa kažemo da je spoj **kapacitivnog karaktera**, a napon  $U$  kasni iza struje za ugao  $\varphi < 0$ .
3. Ako je  $X_L = X_C$ , tada je  $U_L = U_C$  ( slika 22c ) pa kažemo da je spoj u **naponskoj rezonanci**, jer su napon  $U$  i struja  $I$  u fazi ( $\varphi = 0$ ).

Pretpostavimo da je induktivna otpornost veća od kapacitivne. Napon  $U$  se određuje primjenom Pitagorine teoreme za trougao kao:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \quad \text{odnosno} \quad U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

Na temelju Omovog zakona možemo pisati:

$$U_R = I \cdot R \quad ; \quad U_L = I \cdot X_L \quad ; \quad U_C = I \cdot X_C$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednačinu za napone dobijamo:

$$U = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L - I \cdot X_C)^2} = \sqrt{I^2 \cdot [R^2 + (X_L - X_C)^2]} = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za efektivnu vrijednost struje u kolu:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Izraz u nazivniku predstavlja ukupni otpor ili impedansu kola:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Dakle, vidimo da za serijsko RL kolo vrijedi Omov zakon u obliku:

$$I = \frac{U}{Z}$$

Pri poznatim vrijednostima  $Z$ ,  $R$ ,  $X_L$  i  $X_C$  primjenom trigonometrijskih funkcija za trougao dobijamo:

$$\varphi = \arccos \frac{R}{Z} \quad ; \quad \varphi = \arcsin \frac{X_L - X_C}{Z} \quad ; \quad \varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$$

Kod serijskog RLC kola pri  $X_L = X_C$  u kolu nastupa **serijska** ili **naponska rezonanca**. Fizikalna suština naponske rezonance je potpuna razmjena reaktivne energije između magnetnog polja namotaja zavojnice i električnog polja dielektrika kondenzatora, pri čemu nastaje osciliranje energije koje podržava izvor. Prema tome, **kada bi aktivni otpor kola bio jednak nuli ( $R = 0$ )**, **dovoljno bi bilo pobuditi LC kolo i u njemu bi primljena energija trajno oscilirala vlastitom frekvencijom ( $\omega_{sop}$ ) bez prisustva izvora**.

**Vlastitu frekvenciju** oscilatornog kola pri režimu naponske rezonance određujemo kao:

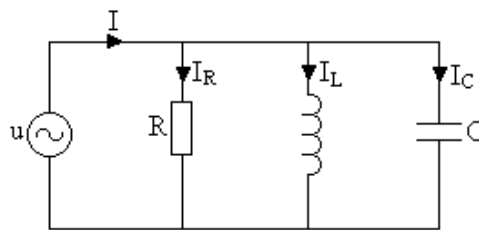
$$X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\omega_{\text{sop}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

**Frekvencija izvora** pri kojoj nastupa naponska rezonanca naziva se **rezonantna frekvencija** :

$$\boxed{\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}} ; \boxed{f_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} ; \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

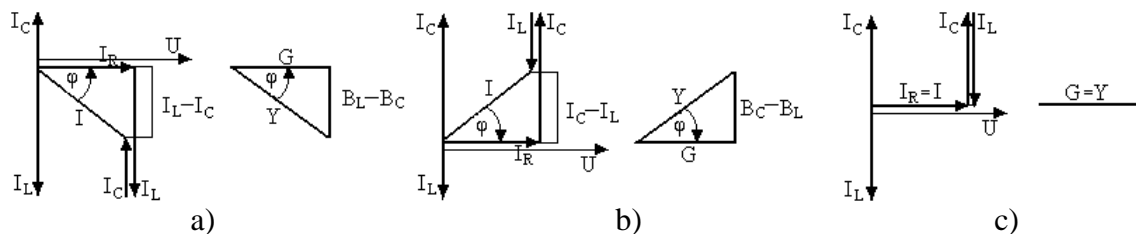
Dakle, rezonantna frekvencija izvora jednaka je frekvenciji slobodnih oscilacija oscilatornog kola. Impedansa serijskog oscilatornog kola pri rezonanci je minimalna i jednaka je aktivnoj otpornosti, a amplituda električnih oscilacija pri rezonanci dostiže maksimum.

### 12.2 PARALELNI RLC SPOJ



Slika 23: Šema paralelnog RLC kola

Za paralelni RLC spoj, ( slika 23 ), je karakteristično da se ukupna struja I raspodjeljuje, prema Prvom Kirhofovom zakonu, na struje  $I_R$ ,  $I_L$  i  $I_C$ . Struja  $I_R$  je u fazi sa naponom U, struja  $I_L$  fazno kasni za naponom U za  $90^\circ$ , dok struja  $I_C$  fazno prednjači naponu U za  $90^\circ$ . Poznajući takve strujne odnose dobijamo dijagrame struja i provodnosti ( trouglovi struja i provodnosti ) kao na slici 24.



Slika24: Trouglovi struja i provodnosti: a)  $B_L > B_C$  ; b)  $B_L < B_C$  ; c)  $B_L = B_C$

U zavisnosti od odnosa reaktivnih provodnosti  $B_L$  i  $B_C$  postoje tri karakteristična slučaja:

1. Ako je  $B_L > B_C$ , tada je  $I_L > I_C$  ( slika 24a ) pa kažemo da je spoj **induktivnog karaktera**, a napon U prednjači struji za ugao  $\varphi > 0$ .
2. Ako je  $B_L < B_C$ , tada je  $I_L < I_C$  ( slika 24b ) pa kažemo da je spoj **kapacitivnog karaktera**, a napon U kasni iza struje za ugao  $\varphi < 0$ .
3. Ako je  $B_L = B_C$ , tada je  $I_L = I_C$  ( slika 24c ) pa kažemo da je spoj u **strujnoj rezonanci**, jer su napon U i struja I u fazi ( $\varphi = 0$ ).

Pretpostavimo da je induktivna provodnost veća od kapacitivne. Struja I se određuje primjenom Pitagorine teoreme za trougao kao:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 \quad \text{odnosno} \quad I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

Na temelju Omovog zakona možemo pisati:

$$I_R = G \cdot U ; \quad I_L = B_L \cdot U ; \quad I_C = B_C \cdot U$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u jednačinu za struje dobijamo:

$$I = \sqrt{(G \cdot U)^2 + (B_L \cdot U - B_C \cdot U)^2} = \sqrt{U^2 \cdot [G^2 + (B_L - B_C)^2]} = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

Iz ove jednačine dobijamo izraz za efektivnu vrijednost napona u kolu:

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}}$$

Izraz u nazivniku predstavlja ukupnu provodnost ili admitansu kola:

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

Dakle, vidimo da za paralelno RC kolo vrijedi Ohmov zakon u obliku:

$$U = \frac{I}{Y}$$

Pri poznatim vrijednostima  $Y$ ,  $G$ ,  $B_L$  i  $B_C$  primjenom trigonometrijskih funkcija za trougao dobijamo:

$$\varphi = \arccos \frac{G}{Y} ; \quad \varphi = \arcsin \frac{B_L - B_C}{Y} ; \quad \varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}$$

Kod paralelnog RLC kola pri  $B_L = B_C$  u kolu nastupa **paralelna** ili **strujna rezonanca**. Fizikalna suština strujne rezonance je potpuna razmjena reaktivne energije između magnetnog polja namotaja zavojnice i električnog polja dielektrika kondenzatora, pri čemu se energija izvora troši samo na pokrivanje aktivnih gubitaka.

**Vlastitu frekvenciju** oscilatornog kola pri režimu strujne rezonance određujemo kao:

$$B_L = B_C \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \omega C \Rightarrow \omega_{\text{sop}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**Frekvencija izvora** pri kojoj nastupa strujna rezonanca naziva se **rezonantna frekvencija** :

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad f_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} ; \quad T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Dakle, rezonantna frekvencija izvora jednaka je frekvenciji slobodnih oscilacija oscilatornog kola. Provodnost paralelnog oscilatornog kola pri rezonanci je minimalna i jednaka je aktivnoj provodnosti, a reaktivne struje grana su jednake i fazno pomjerene za  $180^\circ$ .

### 13. PRIMJERI PRORAČUNA RLC KOLA

**Primjer 1:** Na krajeve električnog uređaja, aktivnog otpora  $R = 10 \Omega$ , priključen je naizmjenični napon trenutne vrijednosti  $u = 311 \cdot \sin 314t$ . Izračunati maksimalnu i efektivnu vrijednost struje, te napisati izraz za trenutnu vrijednost struje.

**Rješenje:**  $I_m = \frac{U_m}{R} = \frac{311}{10} \Rightarrow I_m = 31,1A$

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m = 0,707 \cdot 31,1 \Rightarrow I_{\text{ef}} = 22A$$

$$i = I_m \cdot \sin \omega t \Rightarrow i = 31,1 \cdot \sin 314t$$

**Primjer 2:** Zavojnica bez prisustva feromagnetne jezgre ima induktivitet  $L = 0,016 H$ . Izračunati induktivni otpor zavojnice ako kroz nju protiče naizmjenična struja frekvencije  $f = 50 Hz$ .

**Rješenje:**  $X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,016 \Rightarrow X_L = 5,024\Omega$

**Primjer 3:** Na krajeve zavojnice, induktiviteta  $L$  i zanemarivo malog omskog otpora, priključen je sinusni napon efektivne vrijednosti  $200V$ , frekvencije  $50Hz$ . Pri ovom naponu kroz kolo teče struja efektivne vrijednosti  $4A$ . Izračunati koeficijent induktivnosti zavojnice.

**Rješenje:**  $X_L = 2\pi f L = \frac{U}{I} \Rightarrow L = \frac{U}{I} \cdot \frac{1}{2\pi f} = \frac{200}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \Rightarrow L = 0,16H$

**Primjer 4:** U kolo naizmjenične struje je uključen kondenzator kapaciteta  $C = 199\mu\text{F}$ . Koliki kapacitivni otpor  $X_C$  pruža kondenzator struji frekvencije 100 Hz ?

**Rješenje:**  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 199 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{X_C = 8\Omega}$

**Primjer 5:** U kolo naizmjenične struje je uključen kondenzator kapaciteta  $C = 199\mu\text{F}$ . Ako je frekvencija priključenog napona 100 Hz i efektivna vrijednost  $U_{\text{ef}} = 80\text{ V}$ , kolika je vrijednost struje ?

**Rješenje:**  $I_{\text{ef}} = \frac{U_{\text{ef}}}{X_C} = \frac{U_{\text{ef}}}{\frac{1}{2\pi f C}} = U_{\text{ef}} \cdot 2\pi f C = 80 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 199 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \boxed{I_{\text{ef}} = 10\text{A}}$

**Primjer 6:** Zavojnica omskog otpora  $0,8\Omega$  priključena je na naizmjenični napon efektivne vrijednosti 60V i frekvencije 50 Hz. Pri ovom naponu, kroz zavojnicu protiče struja efektivne vrijednosti 10A. Koliki je induktivitet zavojnice i fazna razlika između napona i struje ?

**Rješenje:**  $Z = \frac{U}{I} = \frac{60}{10} \Rightarrow \underline{Z = 6\Omega}$

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 \Rightarrow X_L^2 = Z^2 - R^2 \Rightarrow 2\pi f L = \sqrt{Z^2 - R^2} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}$$

$$L = \frac{\sqrt{6^2 - 0,8^2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} = \frac{\sqrt{36 - 0,64}}{314} = \frac{\sqrt{35,36}}{314} = \frac{5,946}{314} \Rightarrow \boxed{L = 0,0189\text{H} = 18,9\text{mH}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{R}{Z} = \arccos \frac{0,8}{6} = \arccos 0,1333 \Rightarrow \boxed{\varphi = 82,03^\circ}$$

**Primjer 7:** Zavojnica induktiviteta  $L = 10\text{ H}$  i radnog otpora  $R = 1000\Omega$  ima ulogu prigušnice u kolu naizmjenične struje. Izračunati impedansu zavojnice i faznu razliku između struje i napona ako je frekvencija priključenog napona 50 Hz.

**Rješenje:**  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{1000^2 + (2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10)^2} = \sqrt{10^6 + 9,86 \cdot 10^6} \Rightarrow \boxed{Z = 3295,4\Omega}$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arctg \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10}{1000} = \arctg 3,14 \Rightarrow \boxed{\varphi = 72^\circ 21'}$$

**Primjer 8:** U kolu naizmjenične struje su paralelno priključeni aktivni otpor  $R$  i zavojnica induktiviteta  $L$ . Ukupna impedansa kola je  $Z = 5\Omega$ . Izračunati admitansu kola, te aktivnu i reaktivnu provodnost, ako je fazni ugao između struje i napona  $\varphi = 45^\circ$ .

**Rješenje:**  $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{Y = 0,2\text{S}}$

$$\varphi = \arctg \frac{B_L}{G} \Rightarrow \text{tg} \varphi = \frac{B_L}{G} \Rightarrow \text{tg} 45^\circ = \frac{B_L}{G} \Rightarrow \frac{B_L}{G} = 1 \Rightarrow \underline{B_L = G}$$

$$Y^2 = G^2 + B_L^2 = G^2 + G^2 = 2G^2 \Rightarrow G = \sqrt{\frac{Y^2}{2}} = \frac{Y}{\sqrt{2}} = \frac{0,2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{G = 0,14\text{S}} \quad ; \quad \boxed{B_L = 0,14\text{S}}$$

**Primjer 9:** U kolo naizmjenične struje su paralelno priključeni aktivni otpor  $R$  i zavojnica induktiviteta  $L$ . Ukupna admitansa kola iznosi  $Y = 3 + j\sqrt{3}$ . Izračunati fazni ugao između struje i napona, te predstaviti admitansu u eksponencijalnom obliku.

**Rješenje:**  $\varphi = \arctg \frac{B_L}{G} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}}$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} \Rightarrow \underline{Y = 3,46S}$$

$$\bar{Y} = Y \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = 3,46 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

**Primjer 10:** U kolo naizmjenične struje serijski su uključeni kondenzator  $C = 199 \mu\text{F}$  i otpor  $R = 8\Omega$ . Kolika je impedansa kola i fazni ugao između struje i napona, ako je  $f = 100 \text{ Hz}$ .

**Rješenje:**  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 199 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \underline{X_C = 8\Omega}$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \Rightarrow \boxed{Z = 11,3\Omega}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R} = \arctg \frac{8}{8} = \arctg 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

**Primjer 11:** U kolo naizmjenične struje serijski su uključeni kondenzator  $C = 199 \mu\text{F}$  i otpor  $R = 6\Omega$ . Ako je frekvencija priključenog napona  $100 \text{ Hz}$  i efektivna vrijednost  $U_{\text{ef}} = 80 \text{ V}$ , kolika je vrijednost struje u kolu?

**Rješenje:**  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 199 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \underline{X_C = 8\Omega}$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} \Rightarrow \underline{Z = 10\Omega}$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{U_{\text{ef}}}{Z} = \frac{80}{10} \Rightarrow \boxed{I_{\text{ef}} = 8\text{A}}$$

**Primjer 12:** U kolo naizmjenične struje su paralelno priključeni aktivni otpor  $R$  kondenzator  $C$ . Ukupna impedansa kola je  $Z = 2\Omega$ . Izračunati admitansu kola, te aktivnu i reaktivnu provodnost, ako je fazni ugao između struje i napona  $\varphi = 60^\circ$ .

**Rješenje:**  $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{Y = 0,5S}$

$$\cos \varphi = \frac{G}{Y} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{G}{0,5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{G}{0,5} \Rightarrow G = \frac{0,5 \cdot 1}{2} \Rightarrow \boxed{G = 0,25S}$$

$$\sin \varphi = \frac{B_C}{Y} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{B_C}{0,5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{B_C}{0,5} \Rightarrow B_C = \frac{0,5 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{B_C = 0,43S}$$

**Primjer 13:** U kolo naizmjenične struje su paralelno priključeni aktivni otpor  $R$  i kondenzator  $C$ . Ukupna admitansa kola iznosi  $Y = 1 + j\sqrt{3}$ . Izračunati fazni ugao između struje i napona, te predstaviti admitansu u eksponencijalnom obliku.

**Rješenje:**  $Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} \Rightarrow \underline{Y = 2S}$

$$\varphi = \arccos \frac{G}{Y} = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}}$$

$$\bar{Y} = Y \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = 2 \cdot e^{j60^\circ}}$$

**Primjer 14:** Zavojnica aktivnog otpora  $R = 20 \Omega$  i induktivnosti  $L = 0,2 \text{ H}$  vezana je serijski sa kondenzatorom kapaciteta  $C = 40 \mu\text{F}$ . Izračunati struju u kolu i padove napona na zavojnici i kondenzatoru, ako je napon na stezaljkama kola  $U = 220 \text{ V}$ , a frekvencija  $50 \text{ Hz}$ .

**Rješenje:**  $X_L = \omega L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,2 \Rightarrow \underline{X_L = 62,8\Omega}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \underline{X_C = 79,6\Omega}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{20^2 + (62,8 - 79,6)^2} = \sqrt{400 + (-16,8)^2} \Rightarrow \underline{Z = 26,12\Omega}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{26,12} \Rightarrow \boxed{I = 8,4A}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 8,4 \cdot 62,8 \Rightarrow \boxed{U_L = 527,5V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 8,4 \cdot 79,6 \Rightarrow \boxed{U_C = 668,6V}$$

**Primjer 15:** Otpornik otpornosti  $20\Omega$ , zavojnica induktivnosti  $0,5\text{ H}$  i kondenzator kapaciteta  $40\ \mu\text{F}$  su spojeni u seriju i priključeni na naizmjenični napon  $220\text{ V}$ , frekvencije  $50\text{ Hz}$ . Izračunati :

- induktivni, kapacitivni i ukupni otpor kola
- efektivnu vrijednost struje u kolu
- fazni pomak između struje i napona na stezaljkama

**Rješenje:**  $X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,5 \Rightarrow \boxed{X_L = 157\Omega}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{X_C = 79,6\Omega}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{20^2 + (157 - 79,6)^2} = \sqrt{400 + 5990,76} \Rightarrow \boxed{Z = 79,9\Omega}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{79,9} \Rightarrow \boxed{I = 2,75A}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{77,4}{20} \Rightarrow \boxed{\varphi = 75,5^\circ}$$

**Primjer 16:** Serijski spoj  $R = 30\ \Omega$ ,  $L = 0,1\text{ H}$  i  $C = 0,2\text{ mF}$  priključen je na napon efektivne vrijednosti  $220\text{ V}$  i frekvencije  $50\text{ Hz}$ . Izračunati struju i sve padove napona u kolu.

**Rješenje:**  $X_L = \omega L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,1 \Rightarrow \underline{X_L = 31,4\Omega}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \underline{X_C = 15,9\Omega}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (31,4 - 15,9)^2} \Rightarrow \underline{Z = 33,77\Omega}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{33,77} \Rightarrow \boxed{I = 6,5A}$$

$$U_R = I \cdot R = 6,5 \cdot 30 \Rightarrow \boxed{U_R = 195V}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 6,5 \cdot 31,4 \Rightarrow \boxed{U_L = 204,1V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 6,5 \cdot 15,9 \Rightarrow \boxed{U_C = 103,35V}$$

**Primjer 17:** Paralelni spoj  $R = 30\ \Omega$ ,  $L = 0,1\text{ H}$  i  $C = 0,2\text{ mF}$  priključen je na napon efektivne vrijednosti  $220\text{ V}$  i frekvencije  $50\text{ Hz}$ . Izračunati admitansu i sve struje u kolu. Odrediti karakter spoja.

**Rješenje:**  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{30} \Rightarrow \underline{G = 0,033S}$

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,1} \Rightarrow \underline{B_L = 0,032S}$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \underline{B_C = 0,0628S}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{0,033^2 + (0,032 - 0,0628)^2} \Rightarrow \boxed{Y = 0,0454S}$$

$$I_R = U \cdot G = 220 \cdot 0,033 \Rightarrow \boxed{I_R = 7,33A}$$

$$I_L = U \cdot B_L = 220 \cdot 0,032 \Rightarrow \boxed{I_L = 7,04A}$$

$$I_C = U \cdot B_C = 220 \cdot 0,0628 \Rightarrow \boxed{I_C = 13,82A}$$

$$I = U \cdot Y = 220 \cdot 0,0454 \Rightarrow \boxed{I = 9,99A}$$

Pošto je  $B_L < B_C$  paralelni spoj je *kapacitivnog karaktera*.

**Primjer 18:** Zavojnica induktiviteta  $L = 1,13H$  uključena je u kolo naizmjenične struje frekvencije 50 Hz. Izračunati vrijednost kapaciteta kojeg je potrebno uključiti paralelno induktivitetu pa da u kolu nastupi naponska rezonanca.

**Rješenje:** Naponska ( serijska ) rezonanca nastupa pri:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 LC = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2 \cdot 3,14 \cdot 50)^2 \cdot 1,13} = \frac{1}{314^2 \cdot 1,13} \Rightarrow \boxed{C = 8,9\mu F}$$

**Primjer 19:** Induktivitet  $L = 0,1 H$  i kapacitet  $C = 10 \mu F$  su uključeni u kolo naizmjenične struje. Kolika je rezonantna frekvencija ako u kolu nastupi naponska rezonancija ?

**Rješenje:**  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{6,28 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{f = 159,2Hz \approx 0,16kHz}$

**Primjer 20:** Induktivitet  $L = 2,5 H$  i kapacitet  $C = 10 \mu F$  su uključeni u kolo naizmjenične struje. Koliki je period oscilacija ovakvog kola, ako u njemu nastupi strujna rezonanca ?

**Rješenje:** Strujna ( paralelna ) rezonanca nastupa pri:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{2,5 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 6,28 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{T = 31,4ms}$$

## 14. SNAGA U KOLIMA NAIZMJENIČNE STRUJE

### 14.1 KOLO SA AKTIVNOM OTPORNOŠĆU

Polazeći od zakonitosti da je snaga jednaka proizvodu napona i struje, izraz za trenutnu snagu u ovakvom kolu glasi:

$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t \quad \text{odnosno} \quad p = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t$$

Primjenjujući trigonometrijsku formulu  $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$  dobijamo:

$$p = \frac{U_m \cdot I_m}{2} - \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos 2\omega t$$

Pošto je srednja vrijednost izraza  $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos 2\omega t = 0$  **srednja snaga u ovakvom kolu je:**

$$P_{sr} = \frac{U_m \cdot I_m}{2}$$

Ukoliko izvršimo transformaciju prethodnog izraza dobijamo:

$$P = \frac{U_m \cdot I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{P = U_{ef} \cdot I_{ef} = U \cdot I}$$

**Aktivna ( radna ) snaga na otporniku je:**

$$\boxed{P = U \cdot I = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G} \quad [W]$$

Dakle, *srednja snaga u kolu naizmjenične struje koje sadrži samo aktivni otpor jednaka je proizvodu efektivne vrijednosti priključenog napona i efektivne vrijednosti struje u kolu. Instrumenti za mjerenje snage ( vatmetri ) prilagođeni su za mjerenje srednje snage.*

## 14.2 KOLO SA INDUKTIVITETOM

Polazeći od zakonitosti da je snaga jednaka proizvodu napona i struje, izraz za trenutnu snagu u ovakvom kolu glasi:

$$p = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = U_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t$$

Primjenjujući trigonometrijsku formulu  $\sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2}$  dobijamo:

$$p = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

**Reaktivna ( jalova ) snaga na induktivitetu je:**

$$\boxed{Q = I^2 \cdot X_L = U_L^2 \cdot B_L} \quad [VAr]$$

## 14.3 KOLO SA KAPACITETOM

Polazeći od zakonitosti da je snaga jednaka proizvodu napona i struje, izraz za trenutnu snagu u ovakvom kolu glasi:

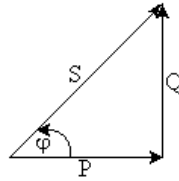
$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t$$

Primjenjujući trigonometrijsku formulu  $\sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2}$  dobijamo:

$$p = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin 2\omega t$$

**Reaktivna ( jalova ) snaga na kapacitetu je:**

$$\boxed{Q = I^2 \cdot X_C = U_C^2 \cdot B_C}$$

**14.4 KOLO SA AKTIVNIM OTPOROM I INDUKTIVITETOM****a) SERIJSKO RL KOLO**

Slika 25: Trougao snaga serijskog RL kola

Iz trougla snaga ( slika 25 ) je vidljivo da u ovakvom kolu postoje tri vrste snaga:

- **Radna ( aktivna ) snaga**

$$P = I \cdot U_R = I^2 \cdot R = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

- **Reaktivna ( jalova ) snaga**

$$Q = I^2 \cdot X_L = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

- **Prividna snaga**

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\text{VA}]$$

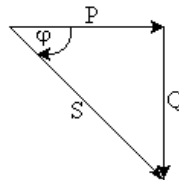
Iz trougla snaga se , takođe , može dobiti:

$$P = S \cdot \cos \varphi \quad \text{odnosno} \quad Q = S \cdot \sin \varphi$$

Odnos:

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

naziva se **faktor snage** .Poželjno je da **faktor snage bude što veći** .

**b) PARALELNO RL KOLO**

Slika 26: Trougao snaga paralelnog RL kola

Iz trougla snaga ( slika 26 ) je vidljivo da u ovakvom kolu postoje tri vrste snaga:

- **Radna ( aktivna ) snaga**

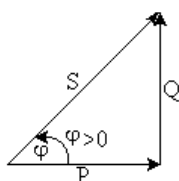
$$P = U^2 \cdot G$$

- **Reaktivna ( jalova ) snaga**

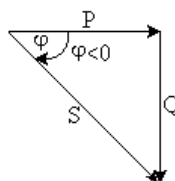
$$Q = U^2 \cdot B_L$$

- **Prividna snaga**

$$S = U^2 \cdot Y = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

**14.5 KOLO SA AKTIVNIM OTPOROM , INDUKTIVITETOM I KAPACITETOM****a) SERIJSKO RLC KOLO**

a)



b)

$$\frac{P=S}{\varphi=0}$$

c)

Slika 27: Trougao snaga serijskog RLC kola: a)  $X_L > X_C$  ; b)  $X_L < X_C$  ; c)  $X_L = X_C$

Iz trougla snaga ( slika 27 ) je vidljivo da u ovakvom kolu postoje tri vrste snaga:

- Radna ( aktivna ) snaga

$$P = I \cdot U_R = I^2 \cdot R = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

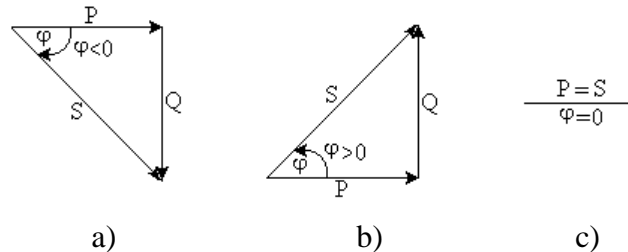
- Reaktivna ( jalova ) snaga

$$Q = I \cdot (U_L - U_C) = I^2 \cdot (X_L - X_C) = Q_L - Q_C = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

- Prividna snaga

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

### b) PARALELNO RLC KOLO



Slika 28: Trougao snaga paralelnog RLC kola: a)  $B_L > B_C$  ; b)  $B_L < B_C$  ; c)  $B_L = B_C$

Iz trougla snaga ( slika 28 ) je vidljivo da u ovakvom kolu postoje tri vrste snaga:

- Radna ( aktivna ) snaga

$$P = U^2 \cdot G$$

- Reaktivna ( jalova ) snaga

$$Q = U^2 \cdot (B_L - B_C)$$

- Prividna snaga

$$S = U^2 \cdot Y = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

## 15. PRIMJERI PRORAČUNA SNAGE U RLC KOLIMA

**Primjer 1:** Električna peć ima otpor grijača  $R = 55\Omega$  , a priključena je na naizmjenični napon čiji je izraz  $u = 311 \cdot \sin 314t$  . Odrediti efektivnu snagu peći .

**Rješenje:** 
$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = \frac{\left(\frac{U_m}{\sqrt{2}}\right)^2}{R} = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{311^2}{2 \cdot 55} = \frac{96721}{110} \Rightarrow \boxed{P = 880W}$$

**Primjer 2:** Zavojnica induktiviteta  $L = 0,165H$  je priključena na napon  $u = 311 \cdot \sin(314t + \frac{\pi}{2})$  .  
Odrediti reaktivnu snagu zavojnice .

**Rješenje:** 
$$Q = \frac{U^2}{X_L} = \frac{\left(\frac{U_m}{\sqrt{2}}\right)^2}{X_L} = \frac{U_m^2}{2X_L} = \frac{311^2}{2 \cdot 314 \cdot 0,165} = \frac{96721}{103,62} \Rightarrow \boxed{Q = 933,4VAr}$$

**Primjer 3:** Na naizmjenični napon  $u = 311 \cdot \sin 314t$  priključen je kondenzator kapaciteta  $C = 10\mu F$  .  
Odrediti reaktivnu snagu kondenzatora .

**Rješenje:** 
$$Q = \frac{U^2}{X_C} = \frac{U_m^2}{2X_C} = \frac{\omega C U_m^2}{2} = \frac{314 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 311^2}{2} \Rightarrow \boxed{Q = 152VAr}$$

**Primjer 4:** Serijski spoj  $R = 30\Omega$  i  $L = 0,1H$  je priključen na sinusni napon efektivne vrijednosti  $100V$  i frekvencije  $50 Hz$  . Odrediti sve snage u kolu .

**Rješenje:**  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{30^2 + (2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,1)^2} \Rightarrow \underline{Z = 43,43\Omega}$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{43,43} \Rightarrow \underline{I = 2,3A} \quad ; \quad P = I^2 \cdot R = 2,3^2 \cdot 30 \Rightarrow \boxed{P = 158,7W}$$

$$Q = I^2 \cdot (\omega L) = 2,3^2 \cdot (314 \cdot 0,1) \Rightarrow \boxed{Q = 166,1VAr} \quad ; \quad S = U \cdot I = 100 \cdot 2,3 \Rightarrow \boxed{S = 230VA}$$

**Primjer 5:** Serijski spoj  $R = 30\Omega$  i  $C = 0,2mF$  je priključen na sinusni napon efektivne vrijednosti 220V i frekvencije 50 Hz . Odrediti sve snage u kolu .

**Rješenje:**  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{30^2 + \left(\frac{1}{314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = \sqrt{900 + 253,55} \Rightarrow \underline{Z = 33,95\Omega}$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{33,95} \Rightarrow \underline{I = 6,48A} \quad ; \quad P = I^2 \cdot R = 6,48^2 \cdot 30 \Rightarrow \boxed{P = 1259,7W}$$

$$Q = I^2 \cdot \frac{1}{\omega C} = 6,48^2 \cdot \frac{1}{314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{Q = 667,4VAr} \quad ; \quad S = U \cdot I = 220 \cdot 6,48 \Rightarrow \boxed{S = 1425,6VA}$$

**Primjer 6:** Paralelni spoj  $R = 30\Omega$  i  $L = 0,1H$  je priključen na sinusni napon efektivne vrijednosti 220V i frekvencije 50 Hz . Odrediti sve snage u kolu .

**Rješenje:**  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{30} \Rightarrow \underline{G = 0,0333S} \quad ; \quad B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{314 \cdot 0,1} \Rightarrow \underline{B_L = 0,032S}$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = \sqrt{0,0333^2 + 0,032^2} \Rightarrow \underline{Y = 0,0462S}$$

$$P = U^2 \cdot G = 220^2 \cdot 0,0333 \Rightarrow \boxed{P = 1613,33W} \quad ; \quad Q = U^2 \cdot B_L = 220^2 \cdot 0,032 \Rightarrow \boxed{Q = 1548,8VAr}$$

$$S = U \cdot I = U^2 \cdot Y = 220^2 \cdot 0,0462 \Rightarrow \boxed{S = 2236,08VA}$$

**Primjer 7:** Paralelni spoj  $R = 30\Omega$  i  $C = 0,2mF$  je priključen na sinusni napon efektivne vrijednosti 220V i frekvencije 50 Hz . Odrediti sve snage u kolu .

**Rješenje:**  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{30} \Rightarrow \underline{G = 0,0333S} \quad ; \quad B_C = \omega C = 314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \underline{B_C = 0,0628S}$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \sqrt{0,0333^2 + 0,0628^2} \Rightarrow \underline{Y = 0,0711S}$$

$$P = U^2 \cdot G = 220^2 \cdot 0,0333 \Rightarrow \boxed{P = 1613,33W} \quad ; \quad Q = U^2 \cdot B_C = 220^2 \cdot 0,0628 \Rightarrow \boxed{Q = 3039,5VAr}$$

$$S = U \cdot I = U^2 \cdot Y = 220^2 \cdot 0,0711 \Rightarrow \boxed{S = 3441,24VA}$$

**Primjer 8:** Radio prijemnik je priključen na napon 220V i uzima struju 0,35A pri  $\cos\phi = 0,92$  . Kolika je snaga prijemnika ?

**Rješenje:**  $P = U \cdot I \cdot \cos\phi = 220 \cdot 0,35 \cdot 0,92 \Rightarrow \boxed{P = 70,84W}$

**Primjer 9:** Na naizmjenični napon 220V je priključena zavojnica otpora  $R$  i induktiviteta  $L$  u seriju sa kondenzatorom  $C$ . Na zavojnici je izmjeren napon  $U_z = 660V$ , a na kondenzatoru  $U_c = 500V$ . Ako je struja u kolu 11A odrediti otpor  $R$ , induktivitet  $L$ , kapacitet  $C$ ,  $\cos\phi$  i snagu  $P$  pri frekvenciji napona od 50 Hz .

**Rješenje:**  $X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{660}{11} \Rightarrow \underline{X_L = 60\Omega} \quad ; \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{60}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \Rightarrow \boxed{L = 0,191H}$

$$X_C = \frac{U_C}{I} = \frac{500}{11} \Rightarrow \underline{X_C = 45,45\Omega} \quad ; \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \cdot 45,45} \Rightarrow \boxed{C = 70\mu\text{F}}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{11} \Rightarrow \underline{Z = 20\Omega} \quad ; \quad R = \sqrt{Z^2 - (X_L - X_C)^2} = \sqrt{20^2 - (60 - 45,45)^2} \Rightarrow \boxed{R = 13,72\Omega}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{13,72}{20} \Rightarrow \boxed{\cos \varphi = 0,686}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 220 \cdot 11 \cdot 0,686 \Rightarrow \boxed{P = 1660\text{W}}$$

**Primjer 10:** Zavojnica i kondenzator u serijskoj vezi su priključeni na naizmjenični napon 120V, 50 Hz. Aktivna snaga u kolu je 200W, a struja 2,39A. Odrediti R, L i C, ako je induktivni otpor dva puta veći kapacitivnog.

**Rješenje:**  $Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{2,39} \Rightarrow \underline{Z = 50,2\Omega} \quad ; \quad \cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{200}{120 \cdot 2,39} \Rightarrow \underline{\cos \varphi = 0,697}$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow R = Z \cdot \cos \varphi = 50,2 \cdot 0,697 \Rightarrow \boxed{R = 35\Omega}$$

$$X = X_L - X_C = X_L - \frac{X_L}{2} \Rightarrow X = \frac{X_L}{2}$$

$$Z^2 = R^2 + X^2 \Rightarrow X = \sqrt{Z^2 - R^2} \Rightarrow X_L = 2 \cdot \sqrt{Z^2 - R^2} = 2 \cdot \sqrt{50,2^2 - 35^2} \Rightarrow \underline{X_L = 72\Omega}$$

$$X_C = \frac{X_L}{2} = \frac{72}{2} \Rightarrow \underline{X_C = 36\Omega}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{72}{2 \cdot 314 \cdot 50} \Rightarrow \boxed{L = 0,229\text{H}} \quad ; \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{314 \cdot 36} \Rightarrow \boxed{C = 88,4\mu\text{F}}$$

**Primjer 11:** Generator naizmjenične struje ima nominalnu snagu 750kVA, a nominalni napon 6,3 kV. Odrediti nominalnu struju generatora i aktivnu snagu pri  $\cos \varphi = 0,8$ .

**Rješenje:**  $S = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{S}{U} = \frac{750 \cdot 10^3}{6,3 \cdot 10^3} \Rightarrow \boxed{I = 119\text{A}}$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 6300 \cdot 119 \cdot 0,8 \Rightarrow \boxed{P = 60\text{kW}}$$

**Primjer 12:** Serijski spoj  $R = 30\Omega$ ,  $L = 0,1\text{H}$  i  $C = 0,2\text{mF}$  je priključen na sinusni napon efektivne vrijednosti 220V i frekvencije 50 Hz. Odrediti sve snage u kolu.

**Rješenje:**  $X_L = \omega L = 314 \cdot 0,1 \Rightarrow \underline{X_L = 31,4\Omega} \quad ; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \underline{X_C = 15,9\Omega}$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (31,4 - 15,9)^2} \Rightarrow \underline{Z = 33,77\Omega}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{33,77} \Rightarrow \underline{I = 6,5\text{A}} \quad ; \quad P = I^2 \cdot R = 6,5^2 \cdot 30 \Rightarrow \boxed{P = 1267,5\text{W}}$$

$$Q = I^2 \cdot (X_L - X_C) = 6,5^2 \cdot (31,4 - 15,9) \Rightarrow \boxed{Q = 654,86\text{VAr}}$$

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 6,5 \Rightarrow \boxed{S = 1430\text{VA}}$$

**Primjer 13:** Paralelni spoj  $R = 30\Omega$ ,  $L = 0,1\text{H}$  i  $C = 0,2\text{mF}$  je priključen na sinusni napon efektivne vrijednosti 220V i frekvencije 50 Hz. Odrediti sve snage u kolu.

**Rješenje:**  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{30} \Rightarrow G = 0,0333\text{S}$  ;  $B_C = \omega C = 314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow B_C = 0,0628\text{S}$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{314 \cdot 0,1} \Rightarrow B_L = 0,032\text{S}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{0,0333^2 + (0,032 - 0,0628)^2} \Rightarrow Y = 0,0454\text{S}$$

$$P = U^2 \cdot G = 220^2 \cdot 0,0333 \Rightarrow P = 1613,33\text{W}$$

$$Q = U^2 \cdot (B_L - B_C) = 220^2 \cdot (0,032 - 0,0628) \Rightarrow Q = 1490,72\text{VAR}$$

$$S = U \cdot I = U^2 \cdot Y = 220^2 \cdot 0,0454 \Rightarrow S = 2197,36\text{VA}$$

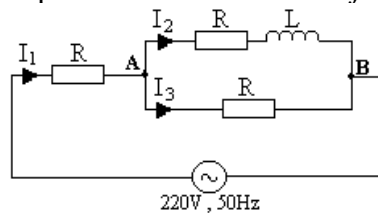
**Primjer 14:** U kolo naizmjenične struje je priključen jednofazni motor. Mjerenjem su očitane slijedeće vrijednosti:  $U = 220\text{V}$ ,  $I = 3,2\text{A}$  i  $P = 563,2\text{W}$ . Odrediti faktor snage motora.

**Rješenje:**  $\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{563,2}{220 \cdot 3,2} \Rightarrow \cos \varphi = 0,8$

## 16. METODE RJEŠAVANJA KOLA NAIZMJENIČNE STRUJE

### 16.1 KIRHOFOVI ZAKONI

**Primjer 1:** Odrediti sve struje i sve napone u kolu sa slike ako je:  $U = 220\text{V}$ ,  $R = 3\ \Omega$  i  $X_L = 2\ \Omega$ .



**Rješenje:**  $\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{R + jX_L} + \frac{1}{R} = \frac{1}{3 + j2} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 3 + j2}{3 \cdot (3 + j2)} = \frac{6 + j2}{9 + j6} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \frac{9 + j6}{6 + j2}$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{9 + j6}{6 + j2} \cdot \frac{6 - j2}{6 - j2} = \frac{54 + j36 - j18 + 12}{6^2 + 2^2} = \frac{66 + j18}{40} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = (1,65 + j0,45)\Omega$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{AB} = 3 + 1,65 + j0,45 \Rightarrow \bar{Z} = (4,65 + j0,45)\Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{220}{4,65 + j0,45} = \frac{220 \cdot (4,65 - j0,45)}{4,65^2 + 0,45^2} = \frac{1023 - j99}{21,825} \Rightarrow \bar{I}_1 = (46,87 - j4,53)\text{A}$$

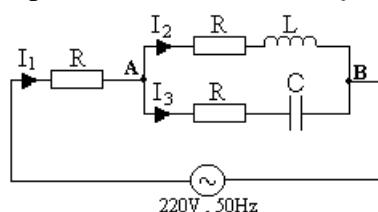
$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 = 3 \cdot (46,87 - j4,53) \Rightarrow \bar{U}_1 = (140,61 - j13,59)\text{V}$$

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U} - \bar{U}_1 = 220 - 140,61 + j13,59 \Rightarrow \bar{U}_{AB} = (79,39 + j13,59)\text{V}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_3} = \frac{79,39 + j13,59}{3} \Rightarrow \bar{I}_3 = (26,46 + j4,53)\text{A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = 46,87 - j4,53 - 26,46 - j4,53 \Rightarrow \bar{I}_2 = (20,41 - j9,06)\text{A}$$

**Primjer 2:** Odrediti sve struje i sve napone u kolu sa slike ako je:  $U = 220\text{V}$ ,  $R = 3\ \Omega$  i  $X_L = X_C = 2\ \Omega$ .



$$\text{Rješenje: } \frac{1}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{1}{R + jX_L} + \frac{1}{R - jX_C} = \frac{1}{3 + j2} + \frac{1}{3 - j2} = \frac{3 + j2 + 3 - j2}{(3 + j2) \cdot (3 - j2)} = \frac{6}{9 + 4} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \frac{9 + 4}{6}$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{9 + 4}{6} = \frac{13}{6} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = 2,16\Omega$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{AB} = 3 + 2,16 \Rightarrow \bar{Z} = 5,16\Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{220}{5,16} \Rightarrow \bar{I}_1 = 42,63\text{A}$$

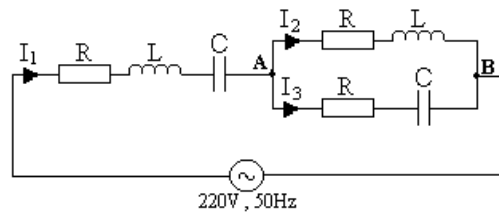
$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 = 3 \cdot 42,63 \Rightarrow \bar{U}_1 = 127,9\text{V}$$

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U} - \bar{U}_1 = 220 - 127,9 \Rightarrow \bar{U}_{AB} = 92,1\text{V}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_3} = \frac{92,1}{3 - j2} = \frac{92,1 \cdot (3 + j2)}{(3 - j2) \cdot (3 + j2)} = \frac{276,3 + j184,2}{3^2 + 2^2} \Rightarrow \bar{I}_3 = (21,25 + j14,17)\text{A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = 42,63 - 21,25 - j14,17 \Rightarrow \bar{I}_2 = (21,38 - j14,17)\text{A}$$

**Primjer 3:** Odrediti sve struje i sve napone u kolu sa slike ako je:  $U = 220\text{V}$ ,  $X_L = 3\Omega$  i  $R = X_C = 2\Omega$ .



$$\text{Rješenje: } \frac{1}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{1}{R + jX_L} + \frac{1}{R - jX_C} = \frac{1}{2 + j3} + \frac{1}{2 - j2} = \frac{2 - j2 + 2 + j3}{(2 + j3) \cdot (2 - j2)} = \frac{4 + j}{10 + j2} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \frac{10 + j2}{4 + j}$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{(10 + j2) \cdot (4 - j)}{(4 + j) \cdot (4 - j)} = \frac{40 + j8 - j10 + 2}{4^2 + 1^2} = \frac{42 - j2}{17} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = (2,47 - j0,11)\Omega$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{AB} = 2 + j3 - j2 + 2,47 - j0,11 \Rightarrow \bar{Z} = (4,47 - j0,89)\Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{220}{4,47 - j0,89} = \frac{220 \cdot (4,47 + j0,89)}{4,47^2 + 0,89^2} = \frac{983,4 + j195,8}{20,773} \Rightarrow \bar{I}_1 = (47,34 + j9,42)\text{A}$$

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 = (2 + j) \cdot (47,34 + j9,42) = 94,68 + j47,34 + j18,84 - 9,42$$

$$\bar{U}_1 = (85,26 + j66,18)\text{V}$$

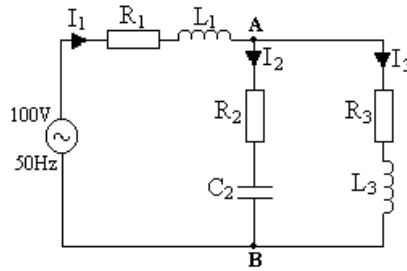
$$\bar{U}_{AB} = \bar{U} - \bar{U}_1 = 220 - 85,26 - j66,18 \Rightarrow \bar{U}_{AB} = (134,74 - j66,18)\text{V}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_3} = \frac{134,74 - j66,18}{2 - j2} = \frac{(134,74 - j66,18) \cdot (2 + j2)}{(2 - j2) \cdot (2 + j2)} = \frac{401,84 + j137,12}{2^2 + 2^2}$$

$$\bar{I}_3 = (50,23 + j17,14)\text{A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = 47,34 + j9,42 - 50,23 - j17,14 \Rightarrow \bar{I}_2 = (-2,89 - j7,72)\text{A}$$

**Primjer 4:** Električno kolo sa slike ima parametre:  $R_1 = 7,7\Omega$ ,  $X_{L1} = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $X_{C2} = 2\Omega$ ,  $R_3 = 6\Omega$ ,  $X_{L3} = 3\Omega$ ,  $U = 100V$ ,  $f = 50\text{ Hz}$ . Izračunati sve struje i sve fazne pomake.



**Rješenje:** 
$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{R_2 - jX_C} + \frac{1}{R_3 + jX_L} = \frac{1}{4 - j2} + \frac{1}{6 + j3} = \frac{6 + j3 + 4 - j2}{24 - j12 + j12 + 6} = \frac{10 + j}{30} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \frac{30}{10 + j}$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{30 \cdot (10 - j)}{(10 + j) \cdot (10 - j)} = \frac{300 - 30j}{101} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = (2,97 - j0,29)\Omega$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{AB} = 8 + j5 + 2,97 - j0,29 \Rightarrow \bar{Z} = (10,97 + j4,71)\Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{100}{10,97 + j4,71} = \frac{100 \cdot (10,97 - j4,71)}{10,97^2 + 4,71^2} \Rightarrow \bar{I}_1 = (7,7 - j3,3)A$$

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 = (8 + j5) \cdot (7,7 - j3,3) = 61,6 + j38,5 - j26,4 + 16,5 \Rightarrow \bar{U}_1 = (78,1 + j12,1)V$$

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U} - \bar{U}_1 = 100 - 78,1 - j12,1 \Rightarrow \bar{U}_{AB} = (21,9 - j12,1)V$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_2} = \frac{21,9 - j12,1}{4 - j2} = \frac{(21,9 - j12,1) \cdot (4 + j2)}{16 + 4} \Rightarrow \bar{I}_2 = (5,59 - j0,23)A$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_3} = \frac{21,9 - j12,1}{6 + j3} = \frac{(21,9 - j12,1) \cdot (6 - j3)}{36 + 9} \Rightarrow \bar{I}_3 = (2,11 - j3,07)A$$

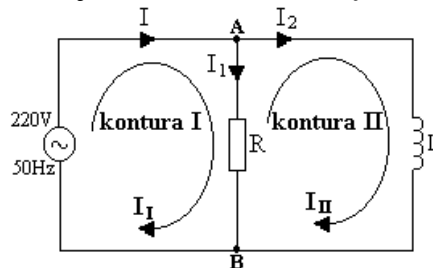
$$\varphi_1 = \arctg \frac{-3,3}{7,7} \Rightarrow \varphi_1 = -23,2^\circ ; I_1 = \sqrt{7,7^2 + 3,3^2} \Rightarrow I_1 = 8,38A ; \bar{I}_1 = 8,38 \cdot e^{-j23,2^\circ}$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{-0,23}{5,59} \Rightarrow \varphi_2 = -2,35^\circ ; I_2 = \sqrt{5,59^2 + 0,23^2} \Rightarrow I_2 = 5,59A ; \bar{I}_2 = 5,59 \cdot e^{-j2,35^\circ}$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{-3,07}{2,11} \Rightarrow \varphi_3 = -55,5^\circ ; I_3 = \sqrt{2,11^2 + 3,07^2} \Rightarrow I_3 = 3,72A ; \bar{I}_3 = 3,72 \cdot e^{-j55,5^\circ}$$

## 16.2 METODA KONTURNIH STRUJA

**Primjer 1:** Odrediti vrijednosti svih struja u kolu sa slike ako je:  $R = 3\Omega$ ,  $X_L = 12\Omega$  i  $U = 220V$ .



**Rješenje:** Postupak za određivanje vrijednosti struja u kolu prema ovom metodu je slijedeći:

1. Izaberemo konture (kontura I i kontura II na slici)
2. Proizvoljno izaberemo smjerove struja u kolu (struje I, I<sub>1</sub> i I<sub>2</sub> na slici)
3. Postavljamo jednačine prema metodu konturnih struja

$$\mathbf{Z}_{11} \cdot \mathbf{I}_I + \mathbf{Z}_{12} \cdot \mathbf{I}_{II} = \mathbf{U}_{11} \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}_{21} \cdot \mathbf{I}_I + \mathbf{Z}_{22} \cdot \mathbf{I}_{II} = \mathbf{U}_{22} \quad (2)$$

gdje je:  $\mathbf{Z}_{11}$ ,  $\mathbf{Z}_{22}$  – ukupne impedanse u konturi I, odnosno konturi II (uvijek su pozitivne)  
 $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$  – ukupne impedanse između konture I i konture II

Predznak ispred ovih vrijednosti je pozitivan "+" ukoliko se smjerovi kontura kroz posmatrane impedanse međusobno podudaraju, a negativan "-" ukoliko su smjerovi kontura kroz te impedanse međusobno suprotni.

$\mathbf{U}_{11}$ ,  $\mathbf{U}_{22}$  – zbir svih napona izvora u konturi I, odnosno konturi II

Dakle, uvrštavanjem ovih vrijednosti, u našem primjeru, dobijamo slijedeći sistem jednačina:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_I + \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_{II} = \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_I + (\mathbf{R} + \mathbf{j}X_L) \cdot \mathbf{I}_{II} = 0 \quad (4)$$

Uvrštavanjem odgovarajućih brojčanih vrijednosti dobijamo:

$$3 \cdot \mathbf{I}_I - 3 \cdot \mathbf{I}_{II} = 220 \quad (5)$$

$$-3 \cdot \mathbf{I}_I + (3 + \mathbf{j}12) \cdot \mathbf{I}_{II} = 0 \quad (6)$$

Ako jednačine (5) i (6) saberemo, dobijamo:

$$\mathbf{j}12 \cdot \mathbf{I}_{II} = 220 \quad (7)$$

Rješavanjem jednačine (7), dobijamo:  $\mathbf{I}_{II} = \frac{220}{\mathbf{j}12}$

Vrijednost struje  $\mathbf{I}_{II}$  u kompleksnom obliku dobijamo na slijedeći način:

$$\mathbf{I}_{II} = \frac{220}{\mathbf{j}12} = -\mathbf{j} \cdot \frac{220}{12} \Rightarrow \underline{\mathbf{I}_{II} = (-\mathbf{j}18,33)\text{A}}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za  $\mathbf{I}_{II}$  u jednačinu (5), dobijamo:

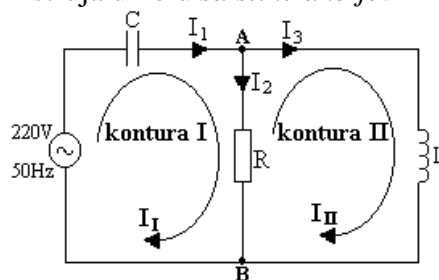
$$\mathbf{I}_I = \frac{220 + 3 \cdot \mathbf{I}_{II}}{3} = \frac{220 + 3 \cdot (-\mathbf{j}18,33)}{3} = \frac{220 - \mathbf{j}55}{3} \Rightarrow \underline{\mathbf{I}_I = (73,33 - \mathbf{j}18,33)\text{A}}$$

Vrijednosti struja u granama dobijamo na slijedeći način:

$$\underline{\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_I = (73,33 - \mathbf{j}18,33)\text{A}} \quad ; \quad \underline{\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{II} = (-\mathbf{j}18,33)\text{A}}$$

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_{II} = 73,33 - \mathbf{j}18,33 + \mathbf{j}18,33 \Rightarrow \underline{\mathbf{I}_I = 73,33\text{A}}$$

**Primjer 2:** Odrediti vrijednosti svih struja u kolu sa slike ako je:  $\mathbf{R} = \mathbf{X}_C = 3 \Omega$ ,  $\mathbf{X}_L = 2 \Omega$  i  $\mathbf{U} = 220 \text{ V}$ .



**Rješenje:** Nakon što odredimo konture i smjerove struja u granama određujemo impedanse:

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{R} - \mathbf{j}X_C \Rightarrow \mathbf{Z}_{11} = (3 - \mathbf{j}3)\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{22} = \mathbf{R} + \mathbf{j}X_L \Rightarrow \mathbf{Z}_{22} = (3 + \mathbf{j}2)\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = 3\Omega$$

Nakon toga postavljamo sistem jednačina:

$$\mathbf{Z}_{11} \cdot \mathbf{I}_I - \mathbf{Z}_{12} \cdot \mathbf{I}_{II} = \mathbf{U} \quad (1)$$

$$-\mathbf{Z}_{12} \cdot \mathbf{I}_I + \mathbf{Z}_{22} \cdot \mathbf{I}_{II} = 0 \quad (2)$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobijamo novi sistem jednačina:

$$(3 - \mathbf{j}3) \cdot \mathbf{I}_I - 3 \cdot \mathbf{I}_{II} = 220 \quad (3)$$

$$-3 \cdot \mathbf{I}_I + (3 + \mathbf{j}2) \cdot \mathbf{I}_{II} = 0 \quad (4)$$

Iz jednačine ( 4 ) izračunamo struju  $I_I$  :

$$I_I = \frac{3+j2}{3} \cdot I_{II} \Rightarrow \underline{I_I = (1 + j0,66) \cdot I_{II}}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u jednačinu ( 3 ) , dobijamo:

$$(3 - j3) \cdot (1 + j0,66) \cdot I_{II} - 3 \cdot I_{II} = 220 \Rightarrow (2 - j) \cdot I_{II} = 220$$

$$I_{II} = \frac{220}{2 - j} \cdot \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{440 + j220}{2^2 + 1^2} \Rightarrow \underline{I_{II} = (88 + j44)A}$$

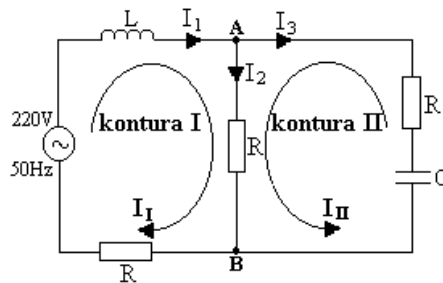
$$I_I = (1 + j0,66) \cdot (88 + j44) = 88 + j44 + j58,66 - 29,33 \Rightarrow \underline{I_I = (58,67 + j102,66)A}$$

Vrijednosti struja u granama dobijamo na slijedeći način:

$$\boxed{I_1 = I_I = (58,66 + j102,66) A} \quad ; \quad \boxed{I_3 = I_{II} = (88 + j44) A}$$

$$I_2 = I_I - I_{II} = 58,66 + j102,66 - 88 - j44 \Rightarrow \boxed{I_2 = (-29,34 + j58,66)A}$$

**Primjer 3:** Odrediti sve struje u kolu sa slike ako je:  $R = 1 \Omega$  ,  $X_L = X_C = 2 \Omega$  ,  $U = 220 V$  .



**Rješenje:** Nakon što odredimo konture i smjerove struja u granama određujemo impedanse:

$$Z_{11} = R + jX_L + R \Rightarrow Z_{11} = (2 + j2)\Omega$$

$$Z_{22} = R - jX_C + R \Rightarrow Z_{22} = (2 - j2)\Omega$$

$$Z_{12} = Z_{21} = R \Rightarrow Z_{12} = Z_{21} = 1\Omega$$

Nakon toga postavljamo sistem jednačina:

$$Z_{11} \cdot I_I + Z_{12} \cdot I_{II} = U \quad (1)$$

$$Z_{12} \cdot I_I + Z_{22} \cdot I_{II} = 0 \quad (2)$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobijamo novi sistem jednačina:

$$(2 + j2) \cdot I_I + 1 \cdot I_{II} = 220 \quad (3)$$

$$1 \cdot I_I + (2 - j2) \cdot I_{II} = 0 \quad (4)$$

Iz jednačine ( 4 ) izračunamo struju  $I_I$  :

$$\underline{I_I = (-2 + j2) \cdot I_{II}}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u jednačinu ( 3 ) , dobijamo:

$$(2 + j2) \cdot (-2 + j2) \cdot I_{II} + I_{II} = 220 \Rightarrow -7 \cdot I_{II} = 220$$

$$I_{II} = -\frac{220}{7} \Rightarrow \underline{I_{II} = -31,43A}$$

$$I_I = (-2 + j2) \cdot (-31,43) \Rightarrow \underline{I_I = (62,86 - j62,86)A}$$

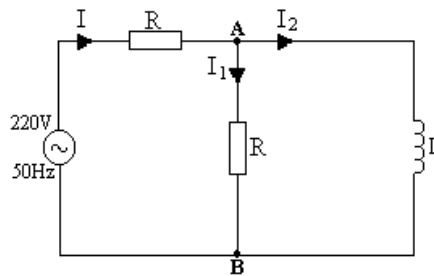
Vrijednosti struja u granama dobijamo na slijedeći način:

$$\boxed{I_1 = I_I = (62,86 - j62,86)A} \quad ; \quad \boxed{I_3 = -I_{II} = 31,43A}$$

$$I_2 = I_I + I_{II} = 62,86 - j62,86 - 31,43 \Rightarrow \boxed{I_2 = (31,43 - j62,86)A}$$

**16.3 METODA POTENCIJALA ČVOROVA**

**Primjer 1:** Metodom potencijala čvorova odrediti vrijednosti svih struja u kolu sa slike ako je:  $R = 3 \Omega$ ,  $X_L = 12 \Omega$  i  $U = 220 \text{ V}$ .



**Rješenje:** Računanje traženih vrijednosti prema ovoj metodi sastoji se u slijedećem:

**1. Postavljamo jednačine prema metodu potencijala čvorova**

$$\begin{aligned} Y_A \cdot V_A - Y_{AB} \cdot V_B &= I_A & (1) \\ -Y_{BA} \cdot V_A + Y_B \cdot V_B &= I_B & (2) \end{aligned}$$

gdje je:  $Y_A, Y_B$  – ukupna provodnost čvorova A odnosno B i jednaka je zbiru svih provodnosti vezanih za pojedini čvor (uvijek je pozitivna)

$Y_{AB} = Y_{BA}$  – ukupna provodnost između čvorova A i B i jednaka je zbiru svih provodnosti vezanih između čvorova A i B

$I_A, I_B$  – zbir svih struja koje ulaze u čvor A odnosno čvor B

Kod ovog metoda je bitno da je potreban broj jednačina uvijek za jedan manji od broja čvorova. To je zbog toga što uvijek jedan čvor proglašavamo za "referentni" ili "nulti" čvor. Potencijal tog čvora jednak je nuli.

Obično će u našim primjerima taj čvor biti čvor B pa ćemo imati  $V_B = 0$  odnosno, naš sistem jednačina će sada imati samo jednu jednačinu oblika:

$$Y_A \cdot V_A = I_A \quad (3)$$

Dakle, uvrštavanjem ovih vrijednosti, u našem primjeru, dobijamo:

$$\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} \right) \cdot V_A = \frac{U}{R} \quad (4)$$

Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti dobijamo:

$$\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j12} \right) \cdot V_A = \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{j12} \right) \cdot V_A = \frac{220}{3} \quad (5)$$

Rješavanjem jednačine (5) dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot j12 + 3}{3 \cdot j12} \cdot V_A &= 73,33 \quad \text{odnosno,} \quad \frac{3 + j24}{j36} \cdot V_A = 73,33 \Rightarrow V_A = \frac{73,33 \cdot j36}{3 + j24} \\ V_A &= \frac{j2639,88}{3 + j24} = \frac{j2639,88 \cdot (3 - j24)}{3^2 + 24^2} = \frac{63357,12 + j7919,64}{585} \Rightarrow \underline{V_A = (108,3 + j13,5)V} \end{aligned}$$

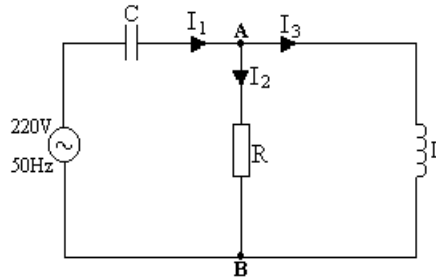
Struje u granama dobijamo na slijedeći način:

$$I = \frac{U - U_{AB}}{R} = \frac{220 - 108,3 - j13,5}{3} \Rightarrow \boxed{I = (37,23 - j4,5)A}$$

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{108,3 + j13,5}{3} \Rightarrow \boxed{I_1 = (36,1 + j4,5)A}$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{jX_L} = \frac{108,3 + j13,5}{j12} = -j \cdot \frac{108,3 + j13,5}{12} \Rightarrow \boxed{I_2 = (1,125 - j9,025)A}$$

**Primjer 2:** Metodom potencijala čvorova odrediti vrijednosti svih struja u kolu sa slike ako je :  
 $R = X_C = 3 \Omega$  ,  $X_L = 2 \Omega$  i  $U = 220 \text{ V}$  .



**Rješenje:** Prvo određujemo referentni čvor, a to će u našem slučaju biti čvor B pa ćemo imati :  $V_B = 0$  .  
 Nakon toga postavljamo jednačinu potencijala čvorova:

$$\left( \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} \right) \cdot V_A = \frac{U}{-jX_C} \quad (1)$$

Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti dobijamo:

$$\left( \frac{1}{-j3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j2} \right) \cdot V_A = \frac{220}{-j3} \quad (2)$$

Rješavanjem jednačine ( 2 ) dobijamo:

$$\frac{3 \cdot j2 - j3 \cdot j2 - j3 \cdot 3}{-j3 \cdot 3 \cdot j2} \cdot V_A = j73,33 \quad \text{odnosno,} \quad \frac{j6 + 6 - j9}{18} \cdot V_A = j73,33 \Rightarrow V_A = \frac{j73,33 \cdot 18}{6 - j3}$$

$$V_A = \frac{j1319,94 \cdot (6 + j3)}{6^2 + 3^2} = \frac{-3959,82 + j7919,64}{45} \Rightarrow \underline{V_A = (-88 + j176)V}$$

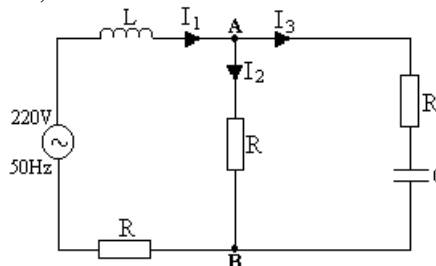
Struje u granama dobijamo na slijedeći način:

$$I_1 = \frac{U - U_{AB}}{-jX_C} = \frac{220 + 88 - j176}{-j3} = j \cdot \frac{308 - j176}{3} \Rightarrow \boxed{I_1 = (58,66 + j102,66)A}$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{-88 + j176}{3} \Rightarrow \boxed{I_2 = (-29,33 + j58,66)A}$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{jX_L} = \frac{-88 + j176}{j2} = -j \cdot \frac{-88 + j176}{2} \Rightarrow \boxed{I_3 = (88 + j44)A}$$

**Primjer 3:** Metodom potencijala čvorova odrediti vrijednosti svih struja u kolu sa slike ako je :  
 $R = 1 \Omega$  ,  $X_L = X_C = 2 \Omega$  ,  $U = 220 \text{ V}$  .



**Rješenje:** Prvo određujemo referentni čvor, a to će u našem slučaju biti čvor B pa ćemo imati :  $V_B = 0$  .  
 Nakon toga postavljamo jednačinu potencijala čvorova:

$$\left( \frac{1}{R + jX_L} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R - jX_C} \right) \cdot V_A = \frac{U}{R + jX_L} \quad (1)$$

Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti dobijamo:

$$\left( \frac{1}{1 + j2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 - j2} \right) \cdot V_A = \frac{220}{1 + j2} \quad (2)$$

Rješavanjem jednačine ( 2 ) dobijamo:

$$\frac{1 - j2 + (1 + j2) \cdot (1 - j2) + 1 + j2}{(1 + j2) \cdot (1 - j2)} \cdot V_A = \frac{220 \cdot (1 - j2)}{5} \quad \text{odnosno,}$$

$$\frac{1 - j2 + 1 + j2 - j2 + 4 + 1 + j2}{5} \cdot V_A = \frac{220 - j440}{5} \Rightarrow V_A = \frac{220 - j440}{7}$$

$$V_A = (31,43 - j62,86)V$$

Struje u granama dobijamo na slijedeći način:

$$I_1 = \frac{U - U_{AB}}{R + jX_L} = \frac{220 - 31,43 + j62,86}{1 + j2} = \frac{(188,57 + j62,86) \cdot (1 - j2)}{5} \Rightarrow I_1 = (62,86 - j62,86)A$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{31,43 - j62,86}{1} \Rightarrow I_2 = (31,43 - j62,86)A$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R - jX_C} = \frac{31,43 - j62,86}{1 - j2} = \frac{(31,43 - j62,86) \cdot (1 + j2)}{5} \Rightarrow I_3 = 31,43A$$

## PITANJA ZA ZAVRŠNI TEST MODULA 5

1. Šta je naizmjenična struja i kako se dijele naizmjenične struje ?
2. Pomoću čega se dobija naizmjenična struja i na kojem principu ?
3. Nacrtati vremenski dijagram naizmjenične struje .
4. Šta je period, kako se označava i u kojim jedinicama se mjeri ?
5. Šta je amplituda ? Kako se računa maksimalna vrijednost induciranog napona ?
6. Šta je frekvencija, kako se označava i u kojim jedinicama se mjeri ?
7. Kolika je frekvencija napona u Evropi, a kolika u Americi ?
8. Šta je početna faza ? Nacrtati dijagram .
9. Šta je kružna frekvencija ? Napisati formulu za računanje kružne frekvencije .
10. Napisati formulu za trenutnu vrijednost induciranog napona i struje .
11. Kako se računa srednja vrijednost naizmjenične struje i napona ?
12. Kako se računa efektivna vrijednost naizmjenične struje i napona ?
13. Kada su dvije naizmjenične veličine u fazi ? Nacrtati dijagram . Šta je fazni pomak ?
14. Napisati izraz za naizmjeničnu struju u kompleksnom i eksponencijalnom obliku .
15. Nacrtati dijagram napona i struje u kolu sa čisto aktivnom otpornošću. Koliki je fazni pomak ?
16. Šta je rezistansa, a šta konduktansa ?
17. Nacrtati dijagram napona i struje u kolu sa čisto induktivnom otpornošću. Koliki je fazni pomak ?
18. Šta je induktivna reaktansa, a šta induktivna susceptansa ? Kako se one računaju ?
19. Nacrtati dijagram napona i struje u kolu sa čisto kapacitivnom otpornošću. Koliki je fazni pomak ?
20. Šta je kapacitivna reaktansa, a šta kapacitivna susceptansa ? Kako se one računaju ?
21. Kako se računa impedansa i fazni ugao u serijskom RL kolu ?
22. Kako se računa admitansa i fazni ugao u paralelnom RL kolu ?
23. Kako se računa impedansa i fazni ugao u serijskom RC kolu ?
24. Kako se računa admitansa i fazni ugao u paralelnom RC kolu ?
25. Kako se računa impedansa i fazni ugao u serijskom RLC kolu ?
26. Kako se računa admitansa i fazni ugao u paralelnom RLC kolu ?
27. Kada nastupa naponska, a kada strujana rezonanca ?
28. Kako se računa kružna učestanost, frekvencija i period pri rezonanci ?
29. Kako se računa aktivna, reaktivna i prividna snaga u serijskom RLC kolu ?
30. Kako se računa aktivna, reaktivna i prividna snaga u paralelnom RLC kolu ?